Math Un 85
2

Mathesis. Systemata & methodi
130.

R

Lehrbegrif der gesamten Mathematik.

Aufgesetzt von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten,
der Phil. Doct. der Mathem. Professor zu Bützow, der Churfl. Bayerschen Akademie der Wissenschaften zu München und der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Harlem Mitglied.

Der Zweyte Theil.

Weitere Ausführung der Rechenkunst. Die Buchstabenrechnung. Die ebene und sphärische Trigonometrie, nebst weiterer Ausführung der Geometrie.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röse. 1768.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn, Herrn Ludewig,

Herzoge zu Mecklenburg, Fürsten zu Wenden, Schwerin und Ratzeburg, auch Grafen zu Schwerin, der Lande Rostock und Stargard Herrn.

Meinem Gnädigsten Fürsten und Herrn.

2

Durchlauchtigster Herzog,

Gnädigster Fürst und Herr,

Daß die Wohlfarth eines Staats und eine ausgebreitete Kenntnis der Wissenschaften miteinander in der genauesten Verbindung stehen, ist eine Warheit, davon alle diejenigen Länder redende Beweise abgeben, wo das Licht der Wissenschaften die Nebel der Unwissenheit zerstreuet hat. Da ist ihr Einfluß auf das Wohl des Staats am grösten,

wo Fürsten die Bemühungen der Gelehrten, unter ihren Mitbürgern nützliche Kenntnisse zu verbreiten mit einem huldvollen Beyfall begnadigen, und durch preiswürdige Unterstützungen befördern. Wo Fürsten die Wissenschaften schätzen, da reizt dies hohe Beyspiel die Unterthanen zur Nachfolge, und ein jeder schämt sich dessen, unwissend zu bleiben. Mecklenburg ist hievon ein vorzügliches Beyspiel. Wie einleuchtend ist nicht der ganzen Welt der Beweis, welchen des Regierenden Herrn Herzogs Durchlauchten durch Stiftung nicht allein der hiesigen hohen Schule, sondern auch des Paedagogii hieselbst, von derjenigen Huld abgeleget haben, welche Höchstdieselben den Wissenschaften gönnen.

Ew. Hochfürstl. Durchlauchten beehren die Wissenschaften mit nicht geringerer Hulde, und Höchstdieselben haben der hiesigen hohen Schule davon zu mehrern mahlen sehr gnädige Beweise gegeben. Auch mir insbesondre haben Ew.

Hochfürstlichen Durchlauchten zu wiederholten mahlen die gnädigsten Versicherungen von dem huldreichsten Beyfall zu ertheilen geruhet, womit Höchstdieselben meine Bemühungen begnadigen, die ich nach meinem geringen Antheil zur Ausbreitung nützlicher Kenntnisse anzuwenden suche; und ich glaube, dies sey Rechtfertigung genug für mich, wenn ich als ein treuer Diener und Unterthan des Durchlauchtigsten Mecklenburgischen Hauses mich erkühne, Ew. Hochfürstlichen Durchlauchten den zweyten Theil dieses Buchs als eine Frucht meiner hiesigen Akademischen Arbeiten in tiefster Unterthänigkeit zu widmen. Es war meine Pflicht, Ew. Hochfürstlichen Durchlauchten wegen der mir so oft huldreichst versicherten vorzüglichen Gnade meine unterthänigste Dankbarkeit öffentlich zu bezeugen. Und wenn ich dieser Schuldigkeit durch die unterthänigste Ueberreichung dieses Buchs einigermassen ein Genüge zu leisten suche, so kan

ich um so mehr eine gnädigste Aufnahme hoffen, als Ew. Hochfürstlichen Durchlauchten mich auf eine ungemein huldreiche Art zur Fortsetzung dieser Arbeit aufzumuntern geruhet haben.

Unter den treuesten Wünschen für das beständige höchste Wohlergehen des ganzen Durchlauchtigsten Hauses Mecklenburg beharre ich in tiefster Ehrerbietung

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Fürst und Herr,
Ew. Hochfürstl. Durchl.

unterthänigster Knecht
W. J. G. Karsten.

Vorrede.

Wenn es gleich seine unstreitige Richtigkeit hat, daß man einen desto grössern praktischen Nutzen von der Erlernung der Mathematik erwarten könne, je mehr gründliche Theorie man sich bekannt macht; so ist doch auf der andern Seite so viel gewiß, daß nicht allen, welche die Mathematik auch um des praktischen Nutzens willen treiben, zugemuthet werden könne, gleich viele Theorie zu lernen, und am allerwenigsten dieses, daß sie sich die ganze Theorie in ihrem völligen Umfange bekannt machen, bevor sie zur Anwendung schreiten. Selbst derjenige Theil der theore-

tischen Mathematik, welchen man als die Anfangsgründe betrachtet, und durch den Nahmen der **Elementar-Mathematik** von der höhern Mathematik unterscheidet, ist schon von einem so weitläuftigen Umfange, daß die vollständige Erlernung desselben nicht eines jeden Sache ist. Wenigstens gehet es nicht wohl an, diese grosse Menge von Sachen in einem halbjährigen Collegio, so wie es auf Universitäten gewöhnlich ist, mit derjenigen Vollständigkeit vorzutragen, daß die Zuhörer dieselben sich insgesamt so geläufig machen können, als zu fertiger Anwendung derselben erfordert wird. Diese Betrachtungen haben mich bewogen, die gewöhnlich so genannte **Mathesin puram** in zweenen besondern Theilen abzuhandeln, und den mündlichen Vorlesungen über jeden Theil ein besondres halbes Jahr zu bestimmen. Ich unterscheide diejenigen Zuhörer, welche nur wenig Mathematik treiben wollen und können, von andern, die mehr Zeit und Fleiß darauf zu verwenden geneigt sind. Jene können zufrieden

frieden seyn, wenn sie so viele Theorie wissen, als der erste Theil vorträgt. Sie werden dadurch ziemlich hinlänglich zur Erlernung der Geodätischen und Architektonischen Wissenschaften vorbereitet seyn; (und diese sind eben diejenigen Theile der praktischen Mathematik, zu deren Erlernung die meisten noch Lust bezeugen) ja sie werden auch Theorie genug wissen, eine Encyclopedie der gesamten praktischen Mathematik, so wie sie in dem Wolfischen Auszuge, und andern ähnlichen Lehrbüchern vorgetragen ist durchzugehen, oder auch statt dessen, die Vorlesungen über die dogmatische Physik zu besuchen, worin nach der gewöhnlichen Einrichtung der Lehrbücher der gröste Theil dessen ebenfalls vorgetragen wird, was man in den Lehrbüchern der Angewandten Mathematik antrift. Diejenigen aber, welche mehr Theorie als die allerersten Grundlehren zu lernen geneigt sind, werden aus diesem zweyten Theile die übrigen Theorien lernen können, die nach der gewöhnlichen Abtheilung noch zur Theoretischen Elementar-Mathematik gehören.

Da-

Dahin rechne ich nun zuerst die Buchstaben-Rechnung. Man kan diesen Theil der Theorie nachdem man die Sache ansehen will, auch schon zur Algebra rechnen. Indessen haben die Herrn Hausen und Kästner diese Rechnungsregeln in den Anfangsgründen mit vorgetragen: und wenn die Algebra eigentlich lehren soll, wie man mathematische Aufgaben durch Gleichungen auflösen müsse; so ist die Buchstaben-Rechnung noch keine eigentliche Algebra, ob sie gleich dazu die nächste Vorbereitung ist. Nach diesem Begrif der Algebra hätte aus diesem Theile also die Lehre von der Auflösung einfacher und quadratischer Gleichungen wegbleiben müssen, und wer sehr genau seyn will, wird dies vielleicht als einen Fehler wider die strenge Methode ansehen. Allein ich habe mich schon in der Vorrede zum ersten Theile darüber erkläret, daß und warum ich mich an die strenge Methode so sehr nicht binden werde. Sonst könnte ich mich auch damit vertheidigen, daß doch alle geometrische

Auf-

Vorrede.

Aufgaben, die sich durch einfache und quadratische Gleichungen auflösen lassen, zur Elementar-Geometrie gehören. Hiezu komt noch dies, daß die Trigonometrie nicht ohne grosse Weitläuftigkeit vollständig abgehandelt werden konnte, ohne die einfachen und quadratischen Gleichungen zu brauchen. Eine sehr gute Vorbereitung zur Buchstaben-Rechnung, und zur Erlernung der Methode, wie man mathematische Aufgaben durch Gleichungen auflöset, war die kurze Einleitung zur praktischen Rechenkunst des gemeinen Lebens, womit ich den Anfang mache.

Weil die Trigonometrie und zwar nicht allein die ebene, sondern auch die sphärische Trigonometrie einen sehr wichtigen Theil der mathematischen Erfindungskunst abgiebt, so bin ich bemühet gewesen, sie so vollständig und deutlich vorzutragen, daß ich hoffe, es werden Anfänger bey mittelmässigen Fleiß und Fähigkeiten dabey keine Schwierigkeiten finden. Ich habe ihre Anwendung sowohl in der ebenen als

auch

auch in der körperlichen Geometrie vollständig zu zeigen gesucht. Und wenn man hier Lehren antreffen wird, die sonst in den Lehrbüchern der Anfangsgründe gewöhnlich nicht vorgetragen werden, so wird man es, wie ich hoffe, der Absicht eines vollständigern Lehrbegrifs angemessen finden, wenn sie hier nicht weggelassen sind. Ich rechne dahin ausser einigen andern Untersuchungen, davon ich gleich nachher etwas erwehnen werde, die vollständigere Theorie von der Kreismessung, so weit sie ohne Differential- und Integral-Rechnung bewerkstelliget wird. Viele werden im Stande seyn, die Rechnung, so wie sie Ludolf von Ceulen geführt hat, zu übersehen, die mit der Theorie von den Reihen, welche sich auf neuere Erfindungen in der höhern Mathematik gründet, nicht bekannt sind. Und ich glaube, daß es eben um deswillen, weil nicht alle diejenigen, welche die Mathematik treiben, sich alle höhere Theorien bekannt machen können, sehr rathsam sey, die ältern Methoden bey solchen

Untersuchungen, wie die Kreismessung ist, in den Lehrbüchern der Anfangsgründe beyzubehalten. Es würde nicht so viele unglückliche neue Erfinder der Quadratur des Kreises geben, wenn diese Herrn sich nur die Mühe nehmen wollten, dasjenige zu lernen worauf Ludolf von Ceulen seine Rechnungen gegründet hat.

Die ebene Geometrie habe ich mit der Lehre von Figuren, die einen gleichen Umfang haben beschlossen. Ich fand, daß sich das meiste, was Pappus davon hat, durch Hülfe des analytischen Vortrags ziemlich kurz zusammen ziehen lasse. In der körperlichen Geometrie schien mir die allgemeine Theorie von den eckigten Körpern, worüber, so viel mir wissend ist, Hr. Euler die ersten Untersuchungen angestellet hat, eine Stelle zu verdienen: eben so auch die Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts und der Oberfläche der Prismen und Pyramiden. Und wenn gleich die Theorie

von den platonischen Körpern in die Ausübung eben keinen sehr erheblichen Einfluß hat; so ist sie doch eine der sinnreichsten Theorien der Alten, und verdienet um deswillen schon, nicht ganz beyseite gesetzt zu werden. Euclides soll ja eben um dieser Theorie willen seine ganze Geometrie aufgesetzt haben, wie Proclus erzehlt. Hier hat die Betrachtung der platonischen Körper noch den besondern Nutzen, daß sich Anfänger dabey vorzüglich in der Anwendung der sphärischen Trigonometrie üben können.

Dies alles dürften nun meine Leser noch wohl billigen, wenn nur das Buch nicht zugleich von mir bestimt wäre, darüber Vorlesungen zu halten. Wenn man es als ein solches Buch betrachtet, so ist es doch wohl unstreitig zu weitläuftig gerathen? Ich begehre mich gegen diesen etwanigen Vorwurf nicht umständlich zu vertheidigen, da er mich nach der deswegen in der Vorrede zum ersten Theil bereits gegebenen Erklärung, eigentlich nicht

trift.

trift. Ich habe kein eigentliches Compendium schreiben wollen, sondern einen vollständigren Lehrbegrif, wovon jedoch wenigstens einige Theile zu Vorlesungen dienen könnten. Ich glaube auch, daß dieser zweyte Theil noch eben nicht ganz ungeschickt dazu sey, und das aus folgenden Gründen. Es ist ja eben nicht nothwendig, daß der Lehrer grade alles im mündlichen Vortrage durchgehe, was in dem Buche stehet, worüber die Vorlesungen gehalten werden; und in diesem Buche kann bey dem mündlichen Vortrage vieles übergangen, und dem eigenen Fleiß derjenigen Zuhörer empfohlen werden, die sich über das mittelmässige in dieser Wissenschaft erheben wollen. Diese müssen sich ohnehin sehr vieles durch eigenen Fleiß bekannt machen, und sie haben hier ein Buch in Händen, wo sie das alles in einem System beysammen finden, was sie sonst weitläuftig beym Privatfleis aus vielen Büchern zusammen suchen müsten. Daher fange ich meine Vorlesungen gleich mit der Buchstabenrech-

nung

nung an, ohne die sechs voranstehenden Abschnitte der Rechenkunst mündlich durchzugehen. Sie dienen zur Grundlage, wenn man etwa in einem öffentlichen Collegio in ein paar Stunden die Woche die praktische Rechenkunst durchgehen wollte. Zuhörer, denen der erste Theil geläufig ist, werden sie nebenher für sich gegen die Zeit durchgehen können, da in den Vorlesungen die Methode der Gleichungen vorkömt, die ich mit solchen Exempeln erläutere, welche aus diesen erwehnten Abschnitten der Rechenkunst hergenommen sind. Im IV Abschnitt der allgemeinen Rechenkunst gehe ich nur die Theorie von Ausziehung der Quadrat-Wurzeln beym mündlichen Vortrage genau durch, und überlasse die Theorie von den Cubikwurzeln dem Privatfleiß der Zuhörer, die damit gewiß für sich fertig werden können, wenn sie jene wohl gefast haben. Uebrigens bitte ich sie, mich zu befragen, wenn ihnen Schwierigkeiten aufstossen sollten. Eben so können die Sexagesimal-Brüche übergangen

werden. Wer sie in der Astronomie einmahl brauchen will, kann hier die Regeln nachschlagen, und sie sich sehr leicht geläufig machen. Der Xte Abschnitt kann ebenfalls den Privatfleiß der Zuhörer beschäftigen. Ich darf wohl nicht erinnern, daß es gar nicht nöthig sey, beym mündlichen Vortrage alle die Rechnungen durchzuführen, wovon hier an den gehörigen Stellen die Resultate hingesetzt sind, als in der Lehre von den Logarithmen, von Berechnung der trigonometrischen Linien, von der Kreismessung, u. s. f. Der Zuhörer kann die Richtigkeit der Resultate beym Privatfleiß prüfen, wenn er Zeit dazu hat, und Vergnügen an solchen Rechnungen findet. In der körperlichen Trigonometrie gehe ich nur die Beweise der Hauptformuln ausführlich durch, die übrigen müssen die fleissigen Zuhörer, die würklich was lernen, und in der Wissenschaft fortkommen, für sich nachrechnen können. So gebe ich auch zur Erlernung der allgemeinen Theorie von den eckigten Körpern, und

der besondern von den Platonischen Körpern nur die allgemeine Anleitung, und überlasse das besondre dem Privatfleiß der Zuhörer, allemahl mit dem Vorbehalt, ihnen besonders fortzuhelfen, wenn ihnen Schwierigkeiten aufstossen sollten. Ich meine, daß dies eben die rechte Methode sey, mit Anfängern die Mathematik zu treiben. Wenn diese nicht selbst Hand anlegen, und durch eigene Uebung sich eine Fertigkeit im Calcul erwerben, und die Lehren der Geometrie sich geläufig machen; so ist alle Mühe und Arbeit umsonst, wenn ihnen gleich der Lehrer alles haarklein vordemonstrirt.

Bey dieser Einrichtung des mündlichen Vortrags bin ich sehr wohl im Stande, das Collegium über diesen zweyten Theil in einem halben Jahre zu endigen, und fleissige Zuhörer binnen Jahres Frist so weit zu bringen, daß sie einer weitern Anführung in der theoretischen Mathematik allenfalls ganz entbehren kön-

können. Ich bin gut dafür, daß diejenigen ohne sonderlichen Anstoß die ganze Algebra und höhere Geometrie durch eigenen Fleiß lernen können, welche sich die beyden ersten Theile dieses Lehrbuchs recht geläufig gemacht haben. Mein Vorsatz ist nun mit göttlicher Hülfe die praktische Mathematik auf eine ähnliche Art abzuhandeln, und der dritte Theil, welcher bereits zum Abdrucke fertig liegt, wird die Statischen Wissenschaften nebst der Mechanik der festen Körper enthalten. Es ist mir unangenehm, daß ich noch hinzusetzen muß, wie dieser zweyte Theil so wenig als der erste, von Druckfehlern frey geblieben sey. Bey Büchern von dieser Art verdienet dies wohl mehr als sonst Entschuldigung, weil wegen Mannigfaltigkeit der Schriften und Zeichen nicht allein der Setzer mehr Mühe hat, sondern auch der Corrector beym Durchsehen auf hundert Kleinigkeiten aufmerksam seyn muß, die bey andern Druck-Schriften gar nicht vorkommen. Hätte ich selbst die Correctur besorgen können,

welches wegen zu grosser Entfernung des Druckorts nicht thunlich war, so würde ich allen möglichen Fleiß angewandt haben, den Druck correct zu liefern. Nun habe ich mich begnügen müssen, die eingeschlichenen Fehler alle sorgfältig aufzusuchen, und das Verzeichniß derselben hier am Ende des Buchs beyzufügen. Fürs künftige soll alle Aufmerksamkeit darauf verwendet werden, den Druck so correct als möglich, zu liefern.

Bützow im Decemb. des Jahrs 1767.

Inhalt des zweyten Theils.

Weitere Ausführung der Rechenkunst.

Der XI. Abschnitt. Von den Kennzeichen einiger Divisoren ganzer Zahlen.
Der XII. Abschnitt. Von der zusammengesetzten Regel Detri und der Regel Multiplex.
Der XIII. Abschnitt. Von der Rabatt- oder Interusurien und andern Reductionsrechnungen.
Der XIV. Abschnitt. Von Zins auf Zins, und der zusammengesetzten Interusurien-Rechnung.
Der XV. Abschnitt. Von der Gesellschafts- und Vermischungs und Alligations-Rechnung.
Der XVI. Abschnitt. Von der Regel Coeci.

Die allgemeine Rechenkunst, oder die Buchstaben-Rechnung mit ihrer Anwendung auf die gemeine Rechenkunst.

Der I. Abschnitt. Von den vier allgemeinen Rechnungsarten.
Der II. Abschnitt. Von den Ausdrücken des Unendlichen.
Der III. Abschnitt. Von den Potenzen und Wurzeln.
Der IV. Abschnitt. Von Ausziehung der Wurzeln aus Quadrat- und Cubik-Zahlen.
Der V. Abschnitt. Von den Sexagesimal-Brüchen.
Der VI. Abschnitt. Von der Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse als dem Ursprunge der Logarithmen.
Der VII. Abschnitt. Von den Briggischen Logarithmen.
Der VIII. Abschnitt. Von der Auflösung mathematischer Aufgaben durch Gleichungen, als der verbesserten Regel Falsi.
Der IX. Abschnitt. Von den Progreßionen.
Der X. Abschnitt. Von der Annuitäten- und Leibrenten-Rechnung.

Weitere Ausführung der ebenen Geometrie.

Der XVI. Abschnitt. Von den Trigonometrischen Linien und ihren Logarithmen.
Der XVII. Abschnitt. Berechnung der Seiten und Winkel gradlinichter Dreyecke und regulärer Polygone.
Der XVIII. Abschnitt. Vergleichung der Tangenten und Cotangenten einfacher und doppelter Winkel.
Der XIX. Abschnitt. Anwendung der Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts gradlinichter Figuren.
Der XX. Abschnitt. Von der Kreismessung.
Der XXI. Abschnitt. Vergleichung des Inhalts der Figuren die einen gleichen Umfang haben.

Weitere Ausführung der körperlichen Geometrie.

Der XXII. Abschnitt. Von den Kugelschnitten.
Der XXIII. Abschnitt. Von den körperlichen Winkeln oder Ecken.
Der XXIV. Abschnitt. Die sphärische Trigonometrie.
Der XXV. Abschnitt. Allgemeine Theorie von den eckigten Körpern.
Der XXVI. Abschnitt. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts und der Oberflächen der Prismen, Pyramiden und der regulären Körper.
Der XXVII. Abschnitt. Von der Cylinder- und Kegel-Fläche.
Der XXVIII. Abschnitt. Von der Kugelfläche und den Abschnitten und Ausschnitten der Kugel.

Weitere

Weitere Ausführung der Rechenkunst.

Der XI. Abschnitt.

Von den Kennzeichen einiger Divisoren ganzer Zahlen.

211 §.

Wenn die Summe aller einzelnen Ziffern einer Zahl, ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Ordnungen, durch 9 theilbar ist: so muß auch die Zahl selbst, welche die Ziffern in ihrer Zusammensetzung ausdrücken, durch 9 theilbar seyn.

Beweis. Jedes Glied der Reihe 1, 10, 100, 1000, u. s. w. durch 9 dividirt läst 1 zum Rest. Also läst jedes Glied der Reihe 2, 20, 200, u. s. w. durch 9 dividirt, 2 zum Rest. Denn $20=10+10$. Jeder Theil läst 1 zum Rest, also läst das ganze 2 zum Rest u. s. f. Etwas ähnliches gilt von einer jeden einfachen Ziffer, die kleiner, als 9 ist. Sie mag

so viel Nullen, als sie wolle, bey sich haben, so wird sie durch 9 dividirt, einen Rest übrig lassen, der dieser Zahl selbst, als einem schlechten Einer betrachtet, gleich ist. So ist z. E. 80 = 10+10+10+10+10+10+10+10+10. Jedes Stück durch 9 getheilt, läst 1 zum Rest, also muß das ganze durch 9 getheilt 8 zum Rest lassen. Wenn demnach eine Zahl, wie z. E. 375 durch 9 getheilt wird: so muß die Summe der Reste aller Theile ihrer verschiedenen Ordnungen = 15 seyn, und die Zahl 375 durch 9 getheilt muß eben den Rest geben, den die Summe der Reste der Theile, nemlich 15, giebt, welche hier 6 wäre. Und wenn die Summe aller dieser Reste durch 9 theilbar ist: so muß es die Zahl selbst auch seyn. So ist z. E. die Zahl 54738 durch 9 theilbar.

212 §.

Wenn eben die Summe aller Ziffern einer Zahl ohne Rücksicht auf ihre Ordnungen durch 3 theilbar ist: so muß es auch die Zahl selbst seyn.

Dieser Satz beruhet mit dem vorigen auf einerley Gründen. Jede Ziffer mit so viel Nullen, als man will, ist entweder durch 3 theilbar, oder läst einen Rest, der eben so groß ist, als der Rest, welchen die Division giebt, wenn man diese Ziffer, als einen schlechten Einer betrachtet. Summirt man also die einzelnen Ziffern, und dividirt sie durch 3: so muß der Rest mit dem einerley seyn, den die Zahl selbst durch 3 dividirt giebt, und bleibt kein Rest: so ist die Zahl selbst durch 3 theilbar.

213 §.

Man zehle die Ziffern einer Zahl von der Rechten

gegen

gegen die Linke, und nenne die Stellen, worin sie stehen, grade oder ungrade, nachdem von der niedrigsten bis zu dieser Ziffer, sie selbst mitgerechnet, eine grade, oder ungrade Anzahl Ziffern vorhanden ist.

Wenn man nun in einer Zahl die Ziffern der ungraden Stellen wie vorhin addirt, und die Summe ist durch 11 theilbar: so ist die Zahl selbst durch 11 theilbar, dafern in den graden Stellen allenthalben Nullen stehen.

Beweis. Wenn ein Glied der Reihe 1, 100, 10000 u. s. f. durch 11 dividirt wird: so ist der Rest allemahl 1. Also läst jedes Glied der Reihe 2, 200, 20000 u. s. f. zum Rest 2, und jedes Glied der Progreßion 3, 300, u. s. f. läst 3. Kurz, jede Ziffer mit einer graden Anzahl Nullen läst durch 11 dividirt einen Rest, der mit der Ziffer einerley ist. Wenn also eine Zahl, wie 7030408 durch 11 dividirt wird: so muß der Rest so groß seyn, als die Summe aller Ziffern 7+3+4+8, und der Rest, den diese Summe durch 11 dividirt läst, muß mit dem Rest der Zahl selbst einerley seyn. Läst also diese Summe keinen Rest: so ist die Zahl durch 11 theilbar.

214 §.

Wenn die Summe der graden Stellen durch 11 theilbar ist, und in den ungraden Stellen setzt man allenthalben 0: so ist die Zahl ebenfalls durch 11 theilbar.

Beweis. Alle Glieder der Progreßion 10, 1000, 100000, 10000000 lassen durch 11 dividirt, den Rest 10, dessen Complement zu 11 die 1 ist. Alle Glieder der Reihe 20, 2000 u. s. f. lassen also zum

Rest 9, und sein Complement ist 2. So läst jede Ziffer, wenn sie hier statt der 1 in der Progreßion stehet, in jedem Gliede einen Rest, dessen Complement zu 11 der Ziffer gleich ist. Wenn demnach eine Zahl wie 70504020 durch 11 dividirt wird: so muß die Summe der Complemente der Reste aller Theile zu 11 der Summe der einzelnen Ziffern gleich seyn. Ist nun die Summe dieser Complemente durch 11 theilbar: so muß auch die Summe der Reste durch 11 theilbar, folglich die Zahl selbst in 11 theilbar seyn (75 §). Ist die Summe dieser Complemente durch 11 untheilbar: so ist es auch die Summe der Reste, also die Zahl selbst (75 §). Der Rest, welchen die Theilung durch 11 in die Summe der Complemente giebt, muß mit dem Rest, welchen die Theilung durch 11 in die Summe der Reste giebt, zusammen genommen dem Divisor 11 gleich seyn (74 §). Denn die Summe der Complemente und Reste ist durch 11 theilbar.

215 §.

Jede Zahl ist als eine Summe zwoer solcher Zahlen anzusehen, dergleichen im 213, und 214 § betrachtet worden. So ist 374938 = 304030 + 70908. Daraus fliessen folgende Regeln.

Wenn sowohl die Summe der graden, als ungraden Stellen jede für sich in 11 theilbar: so ist die ganze Zahl in 11 theilbar (71 §).

Wenn eine von beyden Summen für sich allein durch 11 theilbar, die andre untheilbar ist: so ist die Zahl selbst durch 11 untheilbar (72 §).

Wenn jede dieser Summen in 11 untheilbar

ist

ist, und beyde Summen einen gleichen Rest lassen: so ist die Zahl durch 11 theilbar.

Denn der Rest der graden Stellen ist das Complement des Restes dieses Theils der Zahl zum Divisor 11 (214 §), und der Rest der ungraden Stellen ist mit dem Rest dieses zweyten Theils der Zahl selbst einerley (213 §). Wenn demnach dieser Rest der ungraden Stellen dem Rest der graden Stellen gleich ist, so giebt jeder Theil der Zahl selbst durch 11 dividirt einen Rest, der den andern zum Divisor 11 ergänzt: folglich ist diese Zahl durch 11 theilbar (74 §).

Sind also im letzten Fall beyde Reste ungleich: so ist die Zahl durch 11 untheilbar. (74 §).

216 §.

Jede Zahl, die zur Rechten eine o hat, ist durch 10, hat sie zwo oo, durch 100, hat sie drey ooo, durch 1000 u. s. f. theilbar. Hieraus folgt:

Jede Zahl, die am Ende eine o hat, ist durch 2, und auch durch 5 theilbar (76 §). Also wegen der ersten Ursache eine grade Zahl.

Jede Zahl, die am Ende eine grade Ziffer hat, ist eine grade Zahl, und jede Zahl, die am Ende eine ungrade Ziffer hat, eine ungrade Zahl. Denn jene ist die Summe zwoer graden, diese die Summe einer graden, und einer ungraden Zahl. Also folgt der Satz aus dem 79 §.

Zahlen, deren Endziffer ungrade ist, können in keine grade Zahl theilbar seyn, denn sonst wären sie auch durch 2 theilbar (76 §), welches nicht seyn kan.

Alle grade Zahlen, die durch 3 oder 9 theilbar sind, sind auch durch 6 theilbar.

217 §.

Alle Zahlen, die am Ende eine 5 haben, gehen in 5 auf (216. 71 §). Ist die Endziffer einer Zahl von 0 und von 5 unterschieden: so geht 5 in der Zahl nicht auf. Also geht eben die Zahl auch in kein Product auf, das den Factor 5 hat.

Wenn eine Zahl die Endziffer 5 hat, und in eine grade Zahl multiplicirt wird: so ist 0 die Endziffer des Products. Denn das Product ist in 5 theilbar (76 §), also kan nur 0 oder 5 die Endziffer seyn. Eben dies Product ist eine grade Zahl (79 §), also hat es zur Endziffer 0.

Wird eine Zahl von eben der Art mit einer ungraden Zahl multiplicirt: so ist das Product zwar noch durch 5 theilbar (76 §), aber eine ungrade Zahl (79 §), demnach ist die Endziffer 5.

218 §.

Alle Zahlen, welche am Ende zwo Nullen haben, sind durch 4 theilbar, weil sie durch 100 theilbar sind. Demnach sind auch solche Zahlen durch 4 theilbar, deren zwo Endziffern in 4 aufgehen, diejenigen aber in 4 nicht theilbar, deren zwo Endziffern in 4 nicht aufgehen.

Alle Zahlen, deren zwo Endziffern Nullen sind, gehen auch in 25 auf, folglich auch nur diejenigen, deren zwo Endziffern in 25 aufgehen, und keine andre.

Alle Zahlen, die am Ende drey Nullen haben, sind in 8 sowohl, als in 125 theilbar, also auch nur solche, deren drey letzte Ziffern durch 8 oder 125 theilbar sind, keine andre.

Diese bisherige Untersuchung hat in der Ausübung ihren mannigfaltigen Nutzen. So ist es z. E. in vielen Fällen kein geringer Vortheil im Rechnen, wenn man ein Verhältniß, oder einen Bruch leicht durch seine kleinsten, oder auch nur durch kleinere Zahlen, als die gegebenen sind, ausdrücken kan, ohne auf dem etwas weitläuftigen Wege das gemeine Maaß zu suchen, der im 85, und 97 § erklärt ist. Und bey den Rechnungsfragen, die im folgenden Abschnitt sollen betrachtet werden, finden diese Lehren ihre beständige Anwendung.

219 §.

Wäre das Verhältniß 6081075000: 1777545000 0 gegeben: so kan man es auf folgende Art nach und nach durch kleinere Zahlen ausdrücken:

6081075ØØØ	: 1777545ØØØ
25) 243243	711018
9) 27027	79002
9) 3003	8778
3) 1001	2926
11) 91	266

So weit reichen die beschriebenen Kennzeichen zu. Man kan jetzt nach der Methode des 85 §. der Rechenkunst prüfen, ob die beyden letzten Zahlen vielleicht noch ein gemeines Maaß haben. Aber, da die Zahlen schon ziemlich klein sind: so kan man leicht in Gedanken die Division mit einer, oder der andern von den einfachen Ziffern, die bisher noch nicht gebraucht sind, versuchen, und man wird in diesem Falle leicht wahrnehmen, daß man noch durch 7

theilen könne, und man erhält 13:38, da dann 13 schon eine Primzahl ist.

Man kan aus der Art, wie die Zahlen zusammengesetzt sind, ein ähnliches Kennzeichen der Theilbarkeit durch 7 herleiten. Allein die Methode ist weitläuftiger, als wenn man die Division mit 7 selbst versucht. Man s. v. Clausbergs Dem. Rech. 617 u. f. §.

Der XII. Abschnitt.

Von der zusammengesetzten Regel Detri, und der Regel Multiplex.

220 §.

Die im VIII Abschnitt der Geometrie vorgetragenen Lehren von der Art, wie man ein Verhältniß aus zweyen, oder dreyen andern zusammensetzt, lassen sich viel allgemeiner machen. Hält man nemlich so viele Proportionen als man will, von dieser Art gegen einander

$$A:B = \alpha\ \beta$$
$$B:C = \gamma:\delta$$
$$C:D = \varepsilon:\zeta$$
$$D:E = \eta:\vartheta$$
$$E:F = \iota:\varkappa \text{ u.s.f.}$$

so erhellet, daß allemahl ein solches Verhältniß wie A:F aus den Verhältnissen A:B, B:C, C:D, D:E, E:F, oder $\alpha\ \beta$, $\gamma:\delta$, $\varepsilon:\zeta$, $\eta:\vartheta$, $\iota:\varkappa$ u.s.f. als Theilen zusammengesetzt sey.

221 §.

221 §.

Wenn man die gleichnahmichten Glieder mehrerer Verhältnisse in einander multiplicirt: so ist das Verhältniß der Producte aus allen Verhältnissen der Factoren zusammengesetzt.

Beweis. Der Satz ist für zwey oder drey Verhältnisse wahr (243 §. G.) Wenn aber der Satz für eine gewisse Anzahl von Verhältnissen wahr ist: so gilt er auch für eine Anzahl, die um 1 größer ist. Denn es sey

$$A : H = \left\{\begin{matrix} \alpha : \beta \\ \gamma : \delta \\ \vdots \quad \vdots \\ \varepsilon : \zeta \end{matrix}\right\}$$

und $\alpha . \gamma \ldots \varepsilon : \beta . \delta \ldots \zeta = A : H.$

Es sey ferner $\eta : \vartheta = H : K$

so ist $\eta : \vartheta = \frac{A . \beta . \delta \ldots \zeta}{\alpha . \gamma \ldots \varepsilon} : K$ also $K =$

$\frac{A . \beta . \delta \ldots \zeta . \vartheta}{\alpha . \beta \ldots \varepsilon . \zeta}$, und $\frac{K}{A} = \frac{\beta . \delta \ldots \zeta . \vartheta}{\alpha . \gamma \ldots \varepsilon . \eta .}$, oder

$A : K = \alpha . \gamma \ldots \varepsilon \; \eta : \beta . \delta \ldots \zeta . \vartheta .$ Da nun $A : K$

$= \left\{\begin{matrix} \alpha : \beta \\ \gamma : \delta \\ \vdots \quad \vdots \\ \varepsilon : \zeta \\ \eta : \vartheta \end{matrix}\right\}$; so erhellet, daß der Schluß von einer jeden Anzahl von Verhältnissen auf eine um eins grössere Anzahl folge.

Nun ist der Satz für zwey, auch für drey Verhältnisse wahr, folglich für vier, u. s. f. für eine jede Anzahl von Verhältnissen.

222 §.

Bey allen Rechnungsfragen, die zur Regel quinque gehören (210 §), ist das Verhältniß der gegebenen Zahl zur gesuchten aus zweyen andern gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzt.

Es kan aber das Verhältniß einer gegebenen Zahl zur gesuchten auch aus mehr, als zweyen Verhältnissen zusammengesetzt seyn. Soll man zu 7 Zahlen die 8te suchen: so daß das Verhältniß der 7ten zur 8ten aus den dreyen Verhältnissen der ersten zur 2ten, der 3ten zur 4ten, und der 5ten zur 6ten zusammengesetzt ist: so nennen einige Arithmetici dies die Regula septem, und man sieht leicht, daß man auf ähnliche Art eine regulam novem, regulam undecim u. s. f. machen könne. Andere Arithmetici rechnen alle solche Fälle schlechthin zur regula quinque, wegen der Aehnlichkeit des Verfahrens, obgleich dieser Nahme zu speciel ist. Besser und richtiger kan man den allgemeinen Nahmen der zusammengesetzten Regel Detri brauchen. Folgendes Exempel würde hieher gehören.

Zu einem gewissen Werk sind 20 Arbeiter 15 Wochen des Tages 6 Stunden zu arbeiten um 1000 Fl. bedungen worden: wieviel würde man nach solcher Proportion an 36 Arbeiter auf 4 Wochen, des Tages 8 Stunden zu arbeiten, bezahlen müssen.

Es liegen hierin diese 3 Proportionen: Für gleiche Wochen und Stunden wäre

20 Arb: 36 Arb. = 1000 fl: ges. Anz. fl. für 36 Arb.

Für ungleiche Wochen, gleiche Stunden, und gleichviel Arbeiter.

15 W: 4 W. = ges. Anz. fl: Anz. fl. für 36 Arb. auf 4 W.

Für gleiche Wochen, gleichviel Arbeiter, und ungleiche Stunden.

6 St: 8 St. = ges. Anz. fl: ges. Anz. fl. für 36 Arb. auf 4 W. zu 8 St. d. T.

Also ist:

$20 \times 15 \times 6 : 36 \times 4 \times 8 = 1000$ fl: ges. Anz. fl.

oder: $5 \times 5 \times 1 : 2 \times 8 = 1000$ fl: ges. Anz. fl.

Demnach ist die gesuchte Zahl $= \frac{16000}{25}$ fl. $= 640$ fl., und wenn man diese Rechnungsfragen mit derjenigen vergleicht, die im 210 §. zum Exempel diente; so ergiebt sich ohne weitere Schwierigkeit, daß man in allen zur zusammengesetzten Regel Detri gehörigen Fällen nach folgender allgemeinen Regel verfahren könne.

Man setze alle Fragzahlen am Ende untereinander, das was mit dem gesuchten von einerley Art ist, in der Mitte, und alle übrige Zahlen, deren eben so viele als Fragzahlen seyn müssen, vorne an untereinander. Alle Fragzahlen, imgleichen alle Zahlen in der ersten Stelle multiplicire man in einander, so geben sich drey Zahlen, womit man übrigens nach der gewöhnlichen Regel Detri umgehet.

Wenn man in der ersten und dritten Stelle gleich anfangs die gemeinschaftlichen Factoren wegstreicht, so ändert dies die Proportion nicht (190 §. G.), und die Rechnung wird kürzer. Hiebey kan man nun die im vorigen Abschnitt erwiesenen Regeln die Divisoren zu finden häufig mit Vortheil brauchen.

Nach dieser Vorschrift würde man demnach bey dem vorigen Exempel die ganze Rechnung so führen können.

	20 Arb.			
5	auf 16 W. bek.	1000 fl.	Wiev? 30 A.	F. fl.
5	und 8 St. div.	25	auf 4 W.	62
25		40	und 8 St.	8
		16		16

Fac. 640 fl.

Die zur Seite gesetzten Zahlen sind die Quotienten, welche die Divisionen mit den gemeinschaftlichen Factoren geben.

223 §.

Oft ist das Verhältniß der Zahl, die mit der gesuchten von einerley Art ist, zur gesuchten, aus den Verhältnissen der übrigen Zahlen nicht in einerley Ordnung zusammengesetzt, welches aus der Natur der gegebenen Zahlen eben so, wie bey der einfachen Regel Detri (205 §) beurtheilet werden muß.

Und dies ist der Grund von der so genannten **umgekehrten Regula quinque**, und überhaupt der **umgekehrt zusammengesetzten Regel Detri.** Zerlegt man die gegebene Rechnungsfrage in die darin liegenden Proportionen: so giebt es sich allemahl von selbst, in welchem Verhältniß man die Glieder umgekehrt setzen muß. Ist man aber an die gemeine Art, den Ansatz zu machen, gewohnt; so muß man sich mit dieser Regel helfen.

Kan man sagen: je grösser jede der Fragzahlen ist, desto grösser; und je kleiner jede der Fragzahlen ist, desto kleiner muß die gesuchte Zahl seyn: so bleibt alles in der Ordnung stehen, wie es sich nach der Regel des 222 §. ergiebt. Wenn man aber bey einer der Fragzahlen

zahlen findet, daß man sagen müsse: je grösser diese Fragzahl ist, desto kleiner, und je kleiner diese Fragzahl ist, desto größer muß die gesuchte Zahl seyn: so muß man diese Fragzahl in die erste Stelle setzen, und die zugehörige Zahl aus der ersten in die drittee bringen.

Es sey folgendes Exempel gegeben. Wenn 125 Soldaten mit 16500 fl. 1 Jahr unterhalten werden können, wie lange kan man 2150 Soldaten mit 709500 fl. unterhalten?

Bey gleicher Menge Fl. hätte man

2150 Sold: 125 Sold. = 1 J.: Zeit, in welcher 2150 Sold. mit gleichem Gelde zu erhalten.

Denn jemehr Soldaten, desto kürzere Zeit komt man mit demselben Gelde aus.

Bey gleicher Anzahl Soldaten

16500 fl: 709500 fl. = ges. Zeit: Zeit, in welcher 2150 Sold. mit 709500 fl. zu erhalten.

Denn jemehr Geld, desto länger kan eben die Anzahl damit auskommen. Also ist $2150 \times 16500 : 125 \times 709500 = 1$ J: ges. Zahl Jahre. Diese gesuchte Zahl wird $= \frac{125 \times 7095}{2150 \times 165} = \frac{25 \times 1419}{430 \times 33}$

$= \frac{25 \times 33}{10 \times 33} = \frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}$ J. Wollte man sich nach dem 222 § richten: so erhielte man folgenden Ansatz:

125 Sold. komen aus 1 J. Wie lange? 2150 Sd.
mit 16500 fl. mit 709500 fl.

Aber jemehr Soldaten, desto kürzer muß die gesuchte Zeit seyn. Also setzt man:

10 ℔ ß ℌ	2150 Sold.	>	1 J.	<	2125 Sd.	25
ß ß	1650 ℌ fl.				7095 ℌ fl.	x ℔ x ß ß ß

25

div. 10

Fac. $2\frac{1}{2}$ J.

Mehr Exempel von dieser Art können hier ohne zu grosse Weitläuftigkeit nicht beygebracht werden, und man findet bey den Practischen Schriftstellern derselben eine ziemliche Menge, die man zur Uebung nachschlagen kan.

224 §.

Die bisherigen zur zusammengesetzten Regel Detri gehörigen Fälle sind alle von der Beschaffenheit gewesen, daß mehr, als eine Fragzahl vorgekommen ist. Allein es giebt sehr viele Fälle, wo nur eine Fragzahl vorkomt, die dennoch hieher gehören. Das Verhältniß der Fragzahl zur gesuchten ist sodann aus den übrigen in der Aufgabe vorkommenden Verhältnissen zusammengesetzt, weil man, wie die Beyspiele zeigen werden, bey der Rechnung selbst die Zahlen als abstracte Zahlen ansehen kan, und es bey diesem Geschäfte nicht hindert, wenn gleich dem Anschein nach in dem Ansatz ungleichartige Größen in Verhältnisse gebracht werden. Gesetzt jemand kauft 12 Danziger Ellen Zeug für 16 fl., wieviel werden ihm 30 Brabanter Ellen zu stehen kommen; wenn 5 Brabanter Ellen 6 Danziger Ellen machen.

Man bringe zuerst die Brabanter Ellen in der Fragzahl auf Danziger Ellen, nach der Proportion.

5 Br. Ell: 30 Br: Ell. = 6 Danz. Ell: 36 D. Ell.

Schliest man nun weiter

12 Danz. Ell: 36 Danz. Ell. = 16 fl: 48 fl.
so ist 48 fl. die gesuchte Zahl.

Wenn man in beyden Proportionen die mitlern Glieder verwechselt, und sie nach gemeiner Art ansetzt: so werden sie so stehen:

5 Br. Ell. geben 6 Danz. Ellen; Wieviel 30 Br. Ell. Fac. 36 Danz. Ell.

12 Danz. Ell. kosten 16 fl., was kosten 36 Danz. Ell. Fac. 48 fl.

Siehet man hier alle Zahlen als abstracte Zahlen an: so kan man sagen, es sey das Verhältniß der Fragzahl zur gesuchten, aus den Verhältnissen $\begin{matrix} 5:6 \\ 12:16 \end{matrix}$ zusammengesetzt so, daß die gesuchte Zahl $= \frac{30 \times 6 \times 16}{5 \times 12}$ wird.

Eben dies geben die beyden eigentlichen Proportionen.

5 Br. Ell: 30 Br. Ell. = 6 Danz. Ell: $\frac{30 \times 6}{5}$ Danz. Ell.

12 Danz. Ell: $\frac{30 \times 6}{5}$ Danz. Ell. = 16 fl: ges. Zahl. Also die gesuchte Zahl $= \frac{30 \times 6 \times 16}{5 \times 12}$ wie vorhin, deswegen kan man nach gemeiner Art setzen:

5 Br. Ell. geben 6 D. Ell. } Was kosten 30 Br.
und 12 D. Ell. kosten 16 fl. }

Ellen? Da denn das Product der Zahlen in der zwoten Stelle mit der Fragzahl, durch das Product der Zahlen in der ersten Stelle dividirt, die gesuchte Zahl giebt. Am bequemsten verfährt man so. Man

setzt die Fragzahl in der zwoten Stelle oben an, auf diese Art:

Was kosten 30 Br. Ellen?
wenn 5 Br. Ellen geben 6 Danz. Ellen,
und 12 Danz. Ellen kosten 16 fl.

Man streicht nun, wie im vorhergehenden schon geschehen ist, die gemeinschaftlichen Factoren weg, oder dividirt auf beyden Seiten was einen gemeinschaftlichen Divisor hat mit demselben, und setzt die Quotienten zur Seite: so kan man mit den Quotienten so umgehen, wie man sonst mit den gegebenen Zahlen selbst umgehen müste. Auf die Art komt das Exempel so zu stehen.

—	30 Br. Ell.	
5	Br. Ell. geben 6 Danz. Ell.	6 3
12	Danz. Ell. kosten 16 fl.	

3

Fac. 48 fl.

225 §.

Dies Verfahren heist bey den Practischen Arithmeticis die Regel Multiplex oder *Conjointe*, oder auch die Kettenregel. Sie ist von ungemein weitläuftigen Nutzen, und würklich eine sehr artige Verkürzung vieler solcher Rechnungen, die nach der gemeinen Regel Detri überaus weitläuftig werden müsten. Bey dem Ansatz der hieher gehörigen Exempel sind folgende Regeln zu merken.

Man schreibe die Fragzahl rechter Hand oben an. Linker Hand setze man von den gegebenen Zahlen diejenige, welche mit der Fragzahl von einerley Art ist, und rechter Hand, unter

unter der Fragzahl, diejenige, so in der Aufgabe damit vergleichen, oder sonst auf andre Art verbunden ist. Man setze wieder zur Linken diejenige Zahl, so mit der nächstvorher zur Rechten geschriebenen von einerley Art ist, und zur Rechten die damit in der Aufgabe verbundene. Solchergestalt fahre man fort, bis zuletzt zur Rechten eine Zahl komt, die mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist.

Diese Regel läst sich ohne alle Schwierigkeit in der Kaufmännischen Rechenkunst anwenden, vornemlich bey Wechsel-Reductionen, Gewinn- und Verlust-Rechnung, Arbitragen, und Commissionen, sobald man nur die unter den Kaufleuten eingeführte Sprache verstehet. Eben diese Regel wird eben so leicht bey vielen andern Rechnungsfragen angewandt, die bey den Arithmeticis unter besondern Nahmen vorkommen, so bald man von der Beschaffenheit derjenigen Gewerbe und Handthierungen hinlänglich unterrichtet ist, dahin die vorkommenden Fälle eigentlich gehören. Der Zweck dieser Schrift verstattet keine vollständige Ausführung dieser Anwendung, und die folgenden Exempel sollen nur dazu dienen, die allgemeinen Regeln einiger massen zu erläutern.

226 §.

Hamburg sendet nach Leipzig 1000 Louisd'or, woselbst sie zu 5 rthl. ausgegeben werden. Leipzig sendet die Valuta zurück a 135 p. C. in Hamburger B°. Demnach frägt sich, wieviel Hamburg für diese 1000 Louisd'or in Mark B°. erhalte?

Wenn man die gegebenen Regeln des Ansatzes beobachtet, so wird die Berechnung diese seyn:

9	1 Louisd'or	1000 Louisd'or
11	111 Thl. in L.	8 Thl. in Leipz.
	1 Thl. B°.	100 Thl. B°.
		8 Mark B°.

100000

div. 9)

Fac. 11111 $\frac{1}{9}$ Mark B°.

Wenn der Ducaten in Hamburg 7 Mk. 2 ßl. cour., und die Agio von B°. gegen cour. 18$\frac{3}{4}$ p. C. ist, wieviel Thl. B°. erhält man für 723 Ducat?

Dies ist ein Exempel von der Art, da unter den gegebenen Zahlen Brüche vorkommen, und diese schaft man vor der Rechnung am bequemsten weg, indem man setzet:

1 Duc. giebt 7$\frac{1}{8}$ Mk. cour.
also 8 Duc. — 57 Mk. cour.
Ferner 100 Mk. B°. geben 118$\frac{3}{4}$ Mk. cour.
also 400 Mk. B°. geben 475 Mk. cour.

Nun folgt die Berechnung.

95	8 Ducat	723 Ducat	19
	477 Mk. cour.	87 Mk. cour.	95X95
	8 Mk. Bo.	400 Mk. B°.	
		1 Thl. B°.	

723
2

Fac. 1446 Thl. B°.

Wenn die Ducaten in Hamburg a 2 Thl. B°. gerechnet $\frac{1}{4}$ p. C. besser, als B°. sind, und der Louisd'or

10 Mk. 13½ ßl. B°. gilt, wieviel p. C. differiren die Ducaten zu 2¾ Thl. leicht Geld gerechnet, von dem Louisd'or zu 5 rthl. l. G.

11 Thl. in Duc a 2¾ thl.	100 thl. in Duc a 2¾ thl.
100 Thl in Duc a 2 thl. B.	4 Duc.
1 Thl. B°.	401 Thl. B°.
347 ßl. B°.	48 ßl. B°.
1 Ld'or.	2 Ld'or.
	5 Thl. l. G.

347 | 3817

1604
48

12832
6416

76992
5

384960 | 3817

3260
3817

Fc. 100 3/8 2/17 0/7 thl. in Ld'or. p. 100 thl. Duc.

Der Bruch 3/8 2/17 0/7 läst sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken, er würde fast 41 ßl. geben. Aber bey den Wechsel-Rechnungen ist man nicht gewohnt, dergleichen Brüche beyzubehalten. Man rechnet etwa nur ½, 4tel, 8tel, und 16tel, auch wohl zuweilen 3tel, 6tel, 12tel. Wenn demnach dergleichen Brüche, die sich nicht kleiner ausdrücken lassen, herauskommen; so nimt man unter solchen Brüchen, welche einen der gedachten Nenner haben, einen heraus, der dem gegebenen am nechsten komt. So kan man im gegenwärtigen Exempel 7/8 statt des gefundenen Bruchs nehmen.

227 §.

Wer genau berechnen will, wieviel er beym Wechsel-Handel von einem Ort zum andern eigentlich gewonnen, oder verlohren habe, muß die Handlungskosten, oder sogenannte Spesen mit in Anschlag bringen. Der Accord z. E. geschieht gemeiniglich durch Mäkler, die für ihre Mühe insgemein 1 p. Mille bekommen, und wird diese Belohnung Courtagio genannt. Die Belohnung, welche ein Kaufmann dem andern für seine Mühe giebt, heist die Provision, und hängt es vom Accord ab, wieviel p. C. bezahlt werden soll. Dergleichen Kosten proportioniren sich nach der Summe des Wechsels, und können als Glieder nach der Kettenregel mit berechnet werden. Es giebt andre Kosten, als Briefporto, und dergleichen, die für sich abgezogen werden müsten. Allein, weil dies Kleinigkeiten sind, die bey grossen Handlungen nicht sonderlich geachtet werden: so pflegen die Kaufleute gemeiniglich alle kleine Spesen ohne Unterscheid zusammen zu nehmen, und davor ohne Unterscheid $\frac{1}{2}$, 1, oder mehr p. C. nach Beschaffenheit der Sache zu berechnen.

228 §.

Sollen aber diese Spesen in Rechnung gebracht werden: so ist zu merken, daß sie einmahl das, was man beym Wechsel-Handel weggiebt, vermehren: auch in andern Fällen, das, was man einnimt, vermindern. Ferner werden sie bald in 100, bald auf 100 berechnet, welches in jedem besondern Fall die Umstände ergeben, nachdem man nemlich wegen der Spesen entweder 99 statt 100 rthl., oder 101 statt 100 rthl. berechnen muß. Wer z. E. 1000 Ld'or

25 thl.

a 5 thl. kauft, und dabey 1 p. C. Unkosten hat, der hat eigentlich auf jede 100 Thl. 1 thl. Unkosten, und dies vermehrt seine Ausgabe. Wenn aber jemand 1000 Ld'or verwechselt, und ihm wird 1 p. C. wegen Spesen abgezogen, der erhält für jedes 100 nur 99 Thl. Wer nun in jedem Fall die Natur der Rechnungsfrage überlegt, wird es im Ansatz nicht versehen.

Man nehme an, Hamburg läst in Leipzig 1000 Louisd'or a 5 thl. kaufen, und bekomt die valute a 135 p. C. in B°. Wenn nun wegen Spesen in Leipzig 1 p. C. berechnet wird: so frägt sich, wie hoch solche Louisd'or dem Hamburger in Mk. B°. zu stehen komme? Die Berechnung stehet so:

	1000 Louisd'or
1 Louisd'or	5 Thl. in Leipzig
xøø Thl. in Leipz.	101 Thl. wegen Spesen
żł xßß Thl. in Leipz.	1øø Thl. B°.
9 1 Thl. B°.	ß Mk. B°.

101000

9)

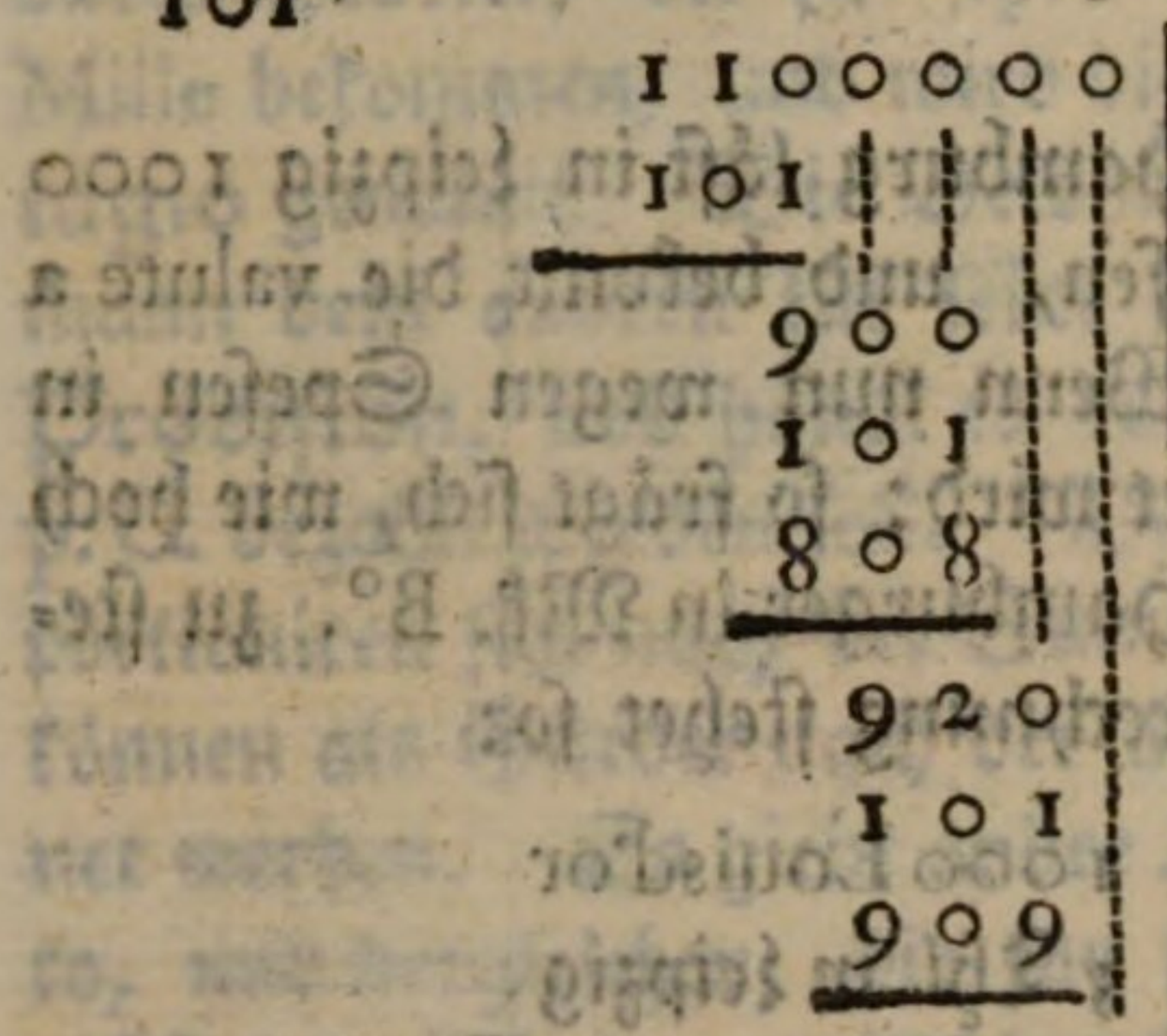
Fac. 11222$\frac{2}{9}$ Mk. B°.

Man setze nun, Hamburg sendet nach Leipzig 1000 Louisd'or, läst sie daselbst a 5 thl. verkaufen, und die valute a 135 p. C. remittiren. Wenn überdem wegen Spesen in Hamburg 1 p. C. auf 100, und in Leipzig gleichfalls 1 p. C. in 100 berechnet wird: so frägt sichs, wieviel Hamburg für die 1000 Ld'or in Mk. B°. erlanget? Die Rechnung wird so geführet:

1 Louisd'or	⅝ Thl. in Leipzig
101 Thl. in Leipz.	100 Thl. in L. p. Hamb. Spes.
x⅝ x⅞⅝ Thl. in L.	100 B.
⅞ x00 Thl. B°.	00 Thl. B°. p. Leipz. Spes. 11
1 Thl. B°.	⅞ Mk. B°.

1000 Louisd'or

101



229 §.

Wer die Gründe dieser Rechnungen wohl eingesehen hat, dem muß es ein leichtes seyn, alles dasjenige zu beurtheilen, was sonst in der Wechsel-Rechnung von der Gewinn- und Verlust-Rechnung, und von den Wechsel-Arbitragen weitläuftig ausgeführt wird. Wer in einer Münzsorte eine Summe ausgiebt, und davor eine Summe in einer andern Münze wieder erlangt, der kan wegen des veränderlichen Geld-Courses eigentlich noch nicht sagen, ob und wieviel er gewonnen, und verlohren habe. Wenn er aber die erlangte Summe wieder ausgiebt, und eine neue Summe in der ersten Münz-

sorte wieder bekomt: so zeigt die Vergleichung mit der zuerst in eben der Münzsorte ausgegebenen Summe sogleich, ob und was gewonnen oder verlohren sey. Dies giebt alse zwo Wechsel-Reductionsfragen, die man auch leicht aus der Regel Multiplex in eins ziehen kan.

230 §.

Wenn man bey den Wechsel-Negotien zwischen etlichen Vorschlägen eine Prüfung anstellt, welcher Vorschlag am nützlichsten sey: so heist man es arbitriren, und es ist hier soviel, als entscheiden, oder erwählen. Daher darf man bey den Arbitragen nur jeden Vorschlag, den man zu einem Wechsel-Handel haben kan, nach den gegebenen Coursen und Preisen insbesondre, und auf eben die Art, wie vorhin gelehret worden, berechnen, jedoch so, daß alle Antworten unter eine Münz-Sorte kommen: so läst sich durch Gegeneinanderhaltung derselben wahrnehmen, bey welchem Handel der meiste Gewinst zu erwarten sey. Viele Exempel davon anzuführen verstattet die Absicht dieses Werks nicht. Zur Uebung kan man eine Menge von Exempeln in von Clausbergs dem. Rech. 915-1052 Seit. nachschlagen. Man s. auch Haasens Unterricht zur Arbitragen, oder Wechselrechnung, u. a. m.

Der XIII. Abschnitt.

Von der Rabat- oder Interusurien- und andern Reductions-Rechnungen.

231 §.

Wenn bey ausstehenden Schulden der Debitor seine Schuld, die er allererst nach einer gewissen Zeit zu zahlen schuldig ist, vor der Zahlzeit bezahlet, und wegen der frühern Zahlung etwas abkürzt: so heist dies abgekürzte der Rabatt, in den Rechten das Interusurium. Es ist demnach die Differenz zwischen der ganzen Schuld und baaren Zahlung. Hiebey ist es nun einerley, ob man bey der Rechnung selbst den Rabatt, oder das jetzt statt des künftigen zu zahlende Capital sucht. Denn wenn das eine gefunden ist, so hat man das andre auch. Die ganze Berechnung gründet sich nun auf folgende Voraussetzung.

Man nimt an, der Creditor leihet von dem Debitor ein Capital, welches, nachdem es bis zur Zeit, da der Debitor zahlen sollte, zinsbar gestanden, mit den Zinsen zusammen der Schuld des Debitoris gleich ist so, daß beyde Forderungen gegen einander aufgehen.

232 §.

Wenn der Debitor ein Capital S nach einem Jahr zu zahlen schuldig ist: so hat die Sache keine Schwierigkeit. Man sucht ein Capital x, welches mit einjährigen Zinsen von x dem Capital S gleich

ist.

ist. Wenn nun 5 p. C. Zinsen gerechnet werden: so ist von x die einjährige Zinse $= \frac{1}{20}x$. Demnach soll $x + \frac{1}{20}x = S$, oder $x(1 + \frac{1}{20}) = S$ seyn. Dies giebt $x = \frac{S}{1+\frac{1}{20}} = \frac{20}{21}S$.

Man setze, das Capital S sey 1000 thl.: so giebt die Rechnung $\frac{20000}{21}$ thl. $= 952\frac{8}{21}$ thl. Dies baare Capital von der künftigen Schuld abgezogen giebt den Rabatt $= 47\frac{13}{21}$ thl.

Die Probe von der Richtigkeit der Rechnung kan man dadurch machen, daß man umgekehrt zu dem gefundenen Capital $952\frac{8}{21}$ thl. die einjährigen Zinsen sucht: denn diese müssen dem Rabatt gleich seyn. Man würde demnach schliessen:

100 thl. geben 5 thl. Zins, was $952\frac{8}{21}$ thl?

Die Antwort ist $47\frac{13}{21}$ thl., welches der gefundene Rabatt war.

233 §.

Wenn die baare Bezahlung früher, als ein Jahr vorher erfolgt, und man rechnet, daß das bezahlte Capital alle Jahr 5 p. C. Zinsen trage: so hat die Berechnung eben so wenig Schwierigkeit, dafern man nicht voraussetzt, daß die am Ende eines jeden Jahres hinzukommende Zinsen nebst dem Capital im folgenden Jahr ebenfalls wieder Zinsen tragen. Die letzte Voraussetzung wird hier noch bey Seite gesetzt. Man nehme also an, aus 100 rthl. werden nach zweyen Jahren 110, nach 3 Jahren 115 rthl. und so überhaupt nach n Jahren $(100+5n)$ thl., oder noch allgemeiner $(100+n\delta)$ thl., wenn δ dem Anwachs oder die Zinse eines Jahres von 100 bedeutet. Es sey S das künftig nach n Jahren zu zahlende Capital, und x das jetzt zu zahlende: so muß

$S = x + \frac{n\delta x}{100}$ seyn. Denn man schließt nach der Regel Detri:

$$100 \text{ thl} : (100 + n\delta) \text{ thl.} = x : x + \frac{n\delta x}{100} = S :$$

so ist die vierte Zahl das, was x in n Jahren geworden ist, und das soll $= S$ seyn. Aber der Ausdruck $S = x\left(1 + \frac{n\delta}{100}\right)$ giebt $x = \frac{S}{1 + \frac{n\delta}{100}} = \frac{100\,S}{100 + n\delta}$.

234 §.

Daraus schließt man leicht folgende allgemeine Regel:

Man suche die Zinse, welche 100 Thl. in der gegebenen Zeit tragen, d. i. $n\delta$, und schließe nach der Regel Detri. Wie die um ihre Zinse vermehrten 100 rthl., d. i. $(100 + n\delta)$ thl. zu 100 thl., so das künftig zu zahlende Capital S, zu dem jetzt baar zu zahlenden x. Ist nun jemand nach 2 Jahren 1000 thl. zu zahlen schuldig, er will mit 5 p. C. Rabatt sogleich zahlen, und man frägt, wie viel er zahlen müsse: so giebt die Rechnung

110 thl : 100 thl. = 1000 thl : $909\frac{1}{11}$ thl.

also der Rabatt $90\frac{10}{11}$ thl.

Kauft jemand eine Obligation von 1500 fl., so erst nach 6 Monath fällig, und soll 6 p. C. p. anno rabattiren: so wird hier $\delta = 6$, $n\delta = 3$, weil $n = \frac{1}{2}$. Also giebt die Rechnung:

103 fl : 100 fl. = 1500 fl : $1456\frac{32}{103}$ fl.

Also ist der Rabatt $43\frac{71}{103}$ fl.

Die Probe von der Richtigkeit der Rechnung kan man auf eben die Art, wie vorhin, machen, wenn man umgekehrt berechnet, wie viel an Capital und Zins herauskomme, wenn das gefundene baare Capital auf eben so viele Zeit, gegen eben die Zins p. anno ausgeliehen worden. Dies Resultat muß mit dem künftig zu zahlenden Capital übereinkommen.

235 §.

Der Hr. von Leibnitz nennt diese Berechnung des Interusurii die Anticipations-Rechnung: man könnte sie allgemeiner die Reductions-Rechnung (reductionem sortis) nennen, weil hier ein Capital auf ein andres wegen Verschiedenheit der Zahlungszeit reducirt wird. Man kan auf solche Art verschiedene Rechnungsfragen, deren Auflösung auf ähnlichen Gründen beruhet, hieher ziehen, da sie sonst unter mancherley andern Nahmen von den Arithmeticis abgehandelt werden.

So kan man verschiedene Capitalien, die auf verschiedene Zeiten verliehen sind, auf ein andres Capital reduciren, das in einem Jahr eben so viel Zins giebt, als die vorigen in den verschiedenen Zeiten zusammen, da sich dann der gesamte Zins leicht berechnen läst.

Frägt man z. E. wieviel der sämtliche Zins von 200 fl. auf 3 Jahr, von 600 fl. auf 4 Jahr, von 800 fl. auf 5 Jahr, und von 1000 fl. auf 6 Jahr a 6 p. C. p. A. betrage: so schliest man

200 a 3 J.	geben	3 x 200 d. i. 600 fl. a 1 J.
600 a 4 J.	so viel	4 x 600 d. i. 2400 fl. a 1 J.
800 a 5 J.	Zins	5 x 800 d. i. 4000 fl. a 1 J.
1000 a 6 J.	als	6 x 1000 d. i. 6000 fl. a 1 J.

Also ist der gesamte Zins so viel,
als 13000 fl. a 1 J. geben.
Nun hat man nach der einfachen Regel Detri
100 fl. Cap. — 6 fl. Zins — 13000 fl. Cap.?
Fac. 780 fl. Zins.

236 §.

So reducirt man auch Capitalien, die gegen verschiedene Zinsen auf gleiche Zeit verliehen sind auf ein Capital, welches auf eben die Zeit, eine gewisse von den vorigen unterschiedene Zinse geben müste, wenn sie allen vorigen zusammen gleich seyn sollte.

Ist z. E. die Frage: wie viel ist der gesamte Zins eines Jahrs von 500 fl. a 3 p. C. von 650 fl. a 4 p. C. von 800 fl. a $4\frac{1}{2}$ p. C. von 1000 fl. a 5 p. C. und von 1400 fl. a 6 p. C. so kan man schliessen.

500 a 3 p. C.	geben	3 × 500 d. i. 1500 fl. a 1 p. C.
650 a 4 p. C.	eben	4 × 650 d. i. 2600 fl. a 1 p. C.
800 a $4\frac{1}{2}$ p. C.	so viel	$4\frac{1}{2}$ × 800 d. i. 3600 fl a 1 p. C.
1000 a 5 p. C.	Zins	5 × 1000 d. i. 5000 fl a 1 p. C.
1400 a 6 p. C.	als	6 × 1400 d. i. 8400 fl a 1 p. C.

Also ist der gesamte Zins so viel,
als 21100 fl. a 1 p. C.
jährlichen Zins geben, und er beträgt 211 fl.

Wären die Capitalien auch auf ungleiche Zeit verliehen: so könnte die Reduction dennoch auf ähnliche Art geschehen z. E.

Wie viel ist der sämtliche Zins von 400 fl. auf 6 Monath a 5 p. C. von 560 fl. auf 8 Monath a $4\frac{1}{2}$ p. C., von 1000 fl. auf 9 Monath a 4 p. C., und von 1300 fl. auf 11 Monath a 6 p. C.

Man reducire so:

400 fl. auf 6 M. a 5 p. C. geben so viel Zins als
$400 \times 6 \times 5 = 12000$ auf 1 M. a 1 p. C.

560 auf 8 Mon. a $4\frac{1}{2}$ p. C. geben so viel Zins, als
$560 \times 8 \times 4\frac{1}{2} = 20160$ auf 1 M. a 1 p. C.

1000 auf 9 M. a 4 p. C. geben so viel Zins, als
$1000 \times 9 \times 4 = 36000$ auf 1 M. a 1 p. C.

1300 auf 11 M. a 6 p. C. geben so viel Zins, als
$1300 \times 11 \times 6 = 85800$ auf 1 M. a 1 p. C.

Also ist der sämtliche Zins so viel,
als 153960 fl. auf 1 M. a 1 p. C. geben.

Nun schliest man weiter.

100 fl. geben 1 Thl. wie viel 153960
auf 1 J. auf $\frac{1}{12}$ J.

so ist die Antwort $\frac{153960}{1200} = 128\frac{3}{10}$ fl.

237 §.

Unter dem Nahmen der Zeitrechnung (reductionis terminorum), lehren die Practici, wenn etwas zu verschiedenen Zeiten zu leisten ist, wie man diejenige Zeit finden soll, in welcher das zu leistende auf einmahl geschehen kan. Gewöhnlich wird die Anwendung auf Schulden gemacht, die zu verschiedenen Zeiten zu bezahlen sind. Dahin würde folgende Frage gehören.

Einer ist dem andern 100 fl. nach 2 Jahren, und 100 fl. nach 4 Jahren beyde mit einerley p. C. Interesse zu zahlen schuldig, man frägt, zu welcher Zeit

beyde

beyde Capitalien zugleich können bezahlt werden, damit der Zins eben so viel betrage, als der sämtliche Zins, den jedes Capital zu seiner Zeit bezahlen würde. Man sage:

100 fl. auf 2 J.	tragen eben	als 200 fl. auf 1 J.
100 fl auf 4 J.	so viel Zins	als 400 fl. auf 1 J.
200		600

Beyde Capitalien zusammen tragen also in ihren zugehörigen Zeiten so viel Zins, als 600 in 1 Jahr. Demnach muß man nun zu dem Capital der 200 fl. eine Zeit suchen, in welcher der Zins davon so viel beträgt, als von 600 fl. in einem Jahre, und also giebt die Rechnung nach dem 205 §. R.

Was 2ø fl.? — 1 Jahr — 6ø fl.

Fac. 3 Jahr.

Wenn man die gegebenen Capitalien allemahl auf solche reducirt, die in einem Jahr so viel Zins tragen, als die gegebenen in den gegebenen Zeiten: so folgt hieraus die Regel: **Daß man die Summe der reducirten Pöste durch die Summe der gegebenen Pöste jedes mahl dividiren könne, um die verlangte Zeit zu erhalten.**

238 §.

Das vorgeschriebene Verfahren dienet dazu, die Rechnung kurz und mit Vortheil zu führen. Sonst kan man auch gleich anfangs den Zins suchen, den jedes Capital in seiner Zeit trägt, und hieraus die Zeit, in welcher die Summe der Capitalien einen so grossen Zins trägt, als die Summe jener Zinsen ist. Demnach würde man das vorige Exempel so rechnen:

1 J.

1 J. giebt 5 fl. Wieviel 2 J.? Antw. 10 fl.
1 J. giebt 5 fl. Wieviel 4 J.? Antw. 20 fl.

Summe 30 fl.

10 fl. geben ein Jahr. Wieviel 30 fl. Fac. 3 Jahre wie vorhin.

Der XIV. Abschnitt.

Vom Zins auf Zins, und der zusammengesetzten Interusurien-Rechnung.

239 §.

Ein Capital, welches auf landübliche Zinsen a 5 p. C. verliehen ist, wächst in Arithmetischer Progreßion, wenn für jedes Jahr die Zinsen zwar dazu gerechnet werden, aber ohne von den jetzt fälligen Zinsen nach einem Jahr wieder Zinsen zu rechnen.

Nach 1 Jahr	wird aus 100	100 + 5
2 Jahr	= = =	100 + 10
3 Jahr	= = =	100 + 15
n Jahre	= = =	100 + *n* × 5.

Wenn überhaupt das Capital = S, die einjährige Zinse = *u* gesetzt wird: so wird S + *nu* aus S nach *n* Jahren. Allein wenn jemand die am Ende eines jeden Jahres einkommenden Zinsen sogleich wieder zinsbar ausliehe, oder sonst zum eben so viel p. C. zins-tragenden Capital schlüge; so würde das Capital weit schneller wachsen. In den Rechten wird dieser

dieser Anwachs des Capitals, der durch die Zinsen von Zinsen zu Wege gebracht wird, der Anatocismus genannt.

240 §.

Ein Capital S trägt im ersten Jahr die Zinse u, wie groß ist es nach n Jahren geworden, wenn am Ende eines jeden Jahres die Zinsen mit zum Capital geschlagen sind.

Aufl. Es ist

	die Zinse.	Das Capital
nach 1 Jahr	u	$S+u$.
" 2 Jahr	$\frac{u(S+u)}{S}$	$\frac{(S+u)^2}{S}$
" 3 Jahr	$\frac{u(S+u)^2}{S^2}$	$\frac{(S+u)^3}{S^3}$

Man schliest nemlich nach dem 201 § auf folgende Art:

S giebt in 1 J. u, was $S+u$?

Antwort $\frac{u(S+u)}{S}$.

Also ist nach 2 Jahren das durch den Zins vermehrte Capital $S+u+\frac{u(S+u)}{S} = \frac{S(S+u)+u(S+u)}{S}$

$= \frac{(S+u)^2}{S}$.

Man schliest weiter

S giebt in 1 J. u, was $\frac{(S+u)^2}{S}$?

Antw. $\frac{u(S+u)^2}{S^2}$.

Also

Also ist nach 3 Jahren das durch den Zins vermehrte Capital $\frac{(S+u)^2}{S} + \frac{u(S+u)^2}{S^2} =$

$$\frac{S(S+u)^2 + u(S+u)^2}{S^2} = \frac{(S+u)^3}{S^2}.$$

Hieraus wird man leicht die Folge ziehen, daß nach n Jahren $\frac{(S+u)^n}{S^{n-1}}$ herauskommen werde, wo die Potenzen so bezeichnet sind, wie im 181 § vorgeschrieben worden. Folgende Betrachtung zeigt, daß dieser Ausdruck allgemein richtig sey.

Man setze, der Ausdruck $\frac{(S+u)^n}{S^{n-1}}$ komme nach n Jahren heraus, und suche, was nun nach $n+1$ Jahren kommen müsse. Also schliesse man, S giebt in 1 Jahr u. Was $\frac{(S+u)^n}{S^{n-1}}$?

Antw. $\frac{u(S+u)^n}{S^n}$.

Also komt nach $n+1$ Jahren das Capital $\frac{(S+u)^n}{S^{n-1}}$

$$+\frac{u(S+u)^n}{S^n} = \frac{S(S+u)^n}{S^{n-1}} + \frac{u(S+u)^n}{S^n} =$$

$$\frac{(S+u)^{n+1}}{S^n}.$$

Diese Schlüsse beweisen, wenn der Ausdruck $\frac{(S+u)^n}{S^{n-1}}$ für n Jahre gelte, daß $\frac{(S+u)^{n+1}}{S^n}$ für $n+1$ Jahre komme. Nun gilt der erste Ausdruck

für $n=2$, also auch für $2+1=3$ Jahre, und eben deswegen auch für $3+1=4$ Jahre, für $4+1=5$ Jahre, u. s. f.

Es sey das gesuchte Capital nach n Jahren $=y$: so hat man $y=\frac{(S+u)^n}{S^{n-1}}$.

241 §.

Ein andres Capital A, das von S unterschieden ist, sey $=mS$, so, daß $1:m=S:A$: so wird u für dies Capital $=mu$, und aus diesem Capital wird nach n Jahren $\frac{(mS+mu)^n}{(mS)^{n-1}}$. Man setze dies $=z$: so hat man $z=\frac{m^n(S+u)^n}{m^{n-1}S^{n-1}}$ (186 §), (denn es erhellet leicht, daß der hieselbst für die Quadrat und Cubikzahlen erwiesene Satz allgemein sey) $=\frac{m^n}{m^{n-1}}y=my$. Also ist auch $1:m=y:z$, und $S:A=y:z$. Folglich $Z=\frac{y}{S}A=\frac{(S+u)^n}{S^n}A$.

Wenn demnach für ein gewisses Capital S die Rechnung schon angestellet, und y gefunden ist: so kan man für jedes andre Capital A das zugehörige Z bey eben der Anzahl Jahre durch die Regel Detri finden, weil $S:A=y:Z$.

Wäre $S=100$: so ist $S+u=105$, wenn 5 p. C. genommen werden. Also $\frac{(S+u)^n}{S^n}=\left(\frac{105}{100}\right)^n$ $=\left(\frac{21}{20}\right)^n=\frac{21^n}{20^n}$, und $Z=\frac{21^n}{20^n}A$.

Dieser

Dieser Ausdruck beweist die Richtigkeit der gewöhnlichen Regel, vermöge welcher diese Aufgabe nach der Regel Multiplex berechnet wird. Es sey das gegebene Capital A = 10000 thl. man frägt, was durch den Anatocismum, in 4 Jahren daraus werde, wenn 5 p. C. p. anno gerechnet werden. Dies Exempel setzet man nach dem 225 § so an:

			Was 1øøøø thl. am Ende des	
Wenn 2ø	xøø	in 1 J.	geben xøx	21 1ten Jahres
2ø	xøø	in 1 J.	= xøx	21 2ten Jahres
2ø	xøø	in 1 J.	= xøx	21 3ten Jahres
2ø	xøø	in 1 J.	= xøx	21 4ten Jahres
16			194481	

$$\text{Antw. } \frac{194481}{16} = 12155\tfrac{1}{16} \text{ thl.}$$

242 §.

Nunmehro läst sich die zur Interusurien-Rechnung gehörige Aufgabe des 233 § in der dort beyseite gesetzten Voraussetzung auflösen, vermöge welcher die Zinsen von Zinsen in Rechnung gebracht werden. Die Frage ist nun eigentlich folgende.

Ein Capital ist nach einer gewissen Anzahl Jahren erst fällig, es soll jetzt mit Abzug des *Interusurii* bezahlt werden; vorausgesetzt: daß der Empfänger mit diesem Capital Zinsen auf Zinsen gewinnen könne, und zwar 5 *p. C. p. A.* gerechnet.

Es sey Z das nach *n* Jahren fällige Capital: so wird ein Capital A gesucht, das, wenn es Zinsen von Zinsen trägt, nach *n* Jahren = *z* ist. Man erhält

also aus dem 241 § $\frac{21^n}{20^n} A = Z$, und hieraus folgt $A = \frac{20^n}{21^n} Z$. Demnach ist dies die vorige Aufgabe umgekehrt.

Wäre also jemand 10000 Thl. nach 4 Jahren schuldig, und der Creditor wollte sie jetzt unter obiger Bedingung annehmen: so würde man das jetzt zu zahlende Capital nach der Regel Multiplex, und zwar auf folgende Art berechnen.

Was 10000 Thl. vor

Wenn 21 xØß Thl. vor 1 J. waren xØØ 20 1 Jahr
21 xØß = = = = xØØ 20 2 Jahren
21 xØß = = = = xØØ 20 3 Jahren
21 xØß = = = = xØØ 20 4 Jahren

194481 1600000000

Antw. $\frac{1600000000}{194481} = 8227\ \frac{48131}{194481}$ Thl.

243 §.

Es gründet sich der Ausdruck $z = \frac{21^n}{20^n} A$, oder $A = \frac{20^n}{21^n} Z$ auf die Voraussetzung, daß 5 p. C. p. anno bezahlt werden. Man kan ihn aber leicht so allgemein machen, daß er sich auf jede andre Voraussetzung erstreckt. Wenn nemlich überhaupt u die einjährige Zinse von 100 bedeutet, so wird $Z = \frac{(100+u)^n}{100^n} A$, und $A = \frac{100^n}{(100+u)^n} Z$. Sollten demnach 6 p. C. p. anno bezahlt werden, so hätte

te man $Z = \frac{106^n}{100^n} A$, oder $Z = \frac{53^n}{50^n} A$, und $A = \frac{50^n}{53^n} Z$.

Vielleicht erwartet man hier die Beantwortung der Frage: **Welche Art, das Interusurium zu berechnen, die richtige sey, die im vorigen Abschnitt gelehrte, oder die gegenwärtige?** diese letztere heist gewöhnlich die **Leibnitzische**, weil ein Aufsatz davon, den **Leibnitz** in die Acta Eruditorum des Jahrs 1683 einrücken lies, eine Streitigkeit veranlaste. Beyde Arten das Interusurium zu berechnen sind aber lange vor Leibnitzen unter den Nahmen des einfachen und zusammengesetzten Interusurii bekannt gewesen. Jene Art heist jetzt gewöhnlich die **Hofmannische**, weil der berühmte **Hofmann** nebst mehrern andern Rechtsgelehrten die Leibnitzische Berechnung verwarf. Die Gesetze verbieten den Anatocismum und Hofmann schlos daraus, man müsse auch beym Interusurio keine Zinsen von Zinsen in Anschlag bringen. Was von dieser blos juristischen Streitigkeit zu halten sey, wird man vollständig beurtheilen können, wenn man in der neuen Ausgabe der **Polackschen** Mathesis Forensis vom Jahr 1756 die 6te Abh. aus dem 2 Cap. der 1 Abth. 49 u. f. §§. gelesen hat, nebst **Bilfingers** Anhang, und **Hofmanns** Demonstrationen ꝛc. welche in der angeführten Mathes. Forens. 116 u. f. S. mit abgedruckt sind; hiernechst aber des H. Hofr. **Kästners** Progr. damit verbindet, so er im Jahr 1747 zu Leipzig unter folgendem Titel herausgegeben hat: Pro justitia calculi interusurii Leibnitiani disputat simulque prælectiones indicit A. G. KÆSTNER.

Der XV. Abschnitt.

Von der Gesellschafts- Vermischungs- und Alligations-Rechnung.

244 §.

Die Gesellschafts-Rechnung, welche von der Vermischungs-Rechnung nur in Ansehung der Rechnungsfragen, worauf man die Anwendung macht, unterschieden ist, lehrt eine gegebene Summe in eine verlangte Anzahl Theile so zu theilen, daß diese Theile ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben. Das im 204 § gegebene Exempel gehört zur Gesellschafts-Rechnung. Folgendes würde zur Vermischungs-Rechnung gehören. Wenn bey Verfertigung des Schiespulvers auf 1 Pfund Salpeter, 3 Unzen Kohlen, und 2 Unzen Schwefel gerechnet werden müssen, und man will 1000 Pfund Schiespulver machen, wie viel Salpeter, Kohlen und Schwefel wird dazu erfordert?

Da auf 1 Pf. 16 Unzen gehen: so ist das Verhältniß der dreyen Ingredienzen durch die Zahlen 16, 3, 2 gegeben. Ihre Summe ist 21. Also schliest man nach dem 204 §.

21 : 16 = 1000 Pf. : $\frac{16}{21}$ 1000 = 761 $\frac{19}{21}$ Pf. Salp.
21 : 3 = 1000 Pf. : $\frac{1}{7}$ 1000 = 142 $\frac{6}{7}$ Pf. Kohl.
21 : 2 = 1000 Pf. : $\frac{2}{21}$ 1000 = 95 $\frac{5}{21}$ Pf. Schwef.

Summe 1000 Pf.

245 §.

245 §.

Wenn das Verhältniß der Theile durch Brüche gegeben ist, und die Summe dieser Brüche macht grade 1 aus; so darf man nur das gegebene ganze in jeden Bruch multipliciren, um die verlangten Theile zu erhalten. Hätte jemand in seinem Testament dem A $\frac{5}{8}$, dem B $\frac{2}{8}$, dem C $\frac{1}{8}$ seiner Capitalien vermacht, und die Summe der Capitalien wäre 8000 rthl.: so würde A 5000, B 2000, und C 1000 rthl. haben müssen.

Wenn aber die Summe der Brüche nicht grade 1 ausmacht: so ist der Sinn der Rechnungsfrage nicht, daß jeder gesuchte Theil grade so viel vom ganzen betragen solle, als jeder der Brüche anzeigt. Vielmehr zeigen die Brüche nur das Verhältniß der Theile gegen einander an, und jeder Theil muß sich zum Ganzen verhalten, wie jeder Bruch zur Summe der Brüche.

Lautete ein Testament so: A, B, C sollen sich in meinen Capitalien auf die Art theilen, daß A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$, C $\frac{1}{4}$ bekomt, und es wären 6000 rthl. vorhanden: so wäre

$\frac{1}{2}$ 6000 = 3000
$\frac{1}{3}$ 6000 = 2000
$\frac{1}{4}$ 6000 = 1500

und die Summe 6500 rthl.

Daß man also bey dieser Theilung um 500 Rthl. zu kurz käme. Verfährt man aber nach der Regel des 204 §, und addirt zuerst die Brüche: so giebt die Rechnung.

	12
$\frac{1}{2}$	6
$\frac{1}{3}$	4
$\frac{1}{4}$	3
Summe	$\frac{1}{1}\frac{3}{2}$

2) 2 3 4

1 3 2

Gem. Renn. $2 \times 3 \times 2 = 12$.

Nun ist das Ganze $\frac{1}{1}\frac{3}{2}$, die Theile $\frac{6}{1}\frac{}{2}$, $\frac{4}{1}\frac{}{2}$, $\frac{3}{1}\frac{}{2}$, und da sich diese Brüche wie ihre Zehler verhalten: so braucht man ihre Nenner nicht weiter. Also giebt die fernere Rechnung.

$$13 : 6 = 6000 : \frac{6 \times 6000}{13} = 2769\frac{3}{1}\frac{}{3} \text{ thl.}$$

$$13 : 4 = 6000 : \frac{4 \times 6000}{13} = 1846\frac{2}{1}\frac{}{3} \text{ thl.}$$

$$13 : 3 = 6000 : \frac{3 \times 6000}{13} = 1384\frac{8}{1}\frac{}{3} \text{ thl.}$$

Summe 6000 rthl.

Es hat also eigentlich $A\frac{6}{1}\frac{}{3}$, $B\frac{4}{1}\frac{}{3}$, und $C\frac{3}{1}\frac{}{3}$ von der Verlassenschaft zu fordern.

246 §.

Man kan die hieher gehörigen Rechnungsfragen so einkleiden, daß eigentlich nicht die Größe der Theile selbst, sondern nur ihr Verhältniß zum Ganzen durch einen Bruch auszudrücken ist, der ein für allemahl die Richtschnur bleibt, wornach die Theilung, wenn sonst keine Aenderung vorgeht, zu machen ist. Wenn mehr Personen in Handlungs-Gesellschaft treten, und verschiedene Capitalien einlegen; so pfleget man zu fragen, wie viel Part ein jeder an dem Gewinst, oder Verlust habe. Die Antwort hat keine Schwierigkeit.

Man

Man sucht das gemeine gröste Maaß der Zahlen, welche die eingelegten Summen ausdrücken, dividirt diese Zahlen damit, und bringt die Quotienten in eine Summe: so ist die Summe der gemeine Nenner aller gesuchten Brüche, und die Quotienten sind ihre Zehler. Diese Brüche drückt man alsdenn, wenn es angehet, noch weiter durch ihre kleinsten Zahlen aus. Man darf nur die Berechnung des folgenden Exempels überdenken: so fällt der Grund dieses Verfahrens leicht in die Augen.

Fünf Rheders haben ein Schiff, dazu gab A 4800, B 6400, C 10000, D 6400, E 2400, F 2000 Mark. Die Frage ist, den wievielsten Part jeder an diesem Schiffe habe? Man rechnet so:

		4
A	48øø	12
B	64øø	16
C	100øø	25
D	64øø	16
E	24øø	6
F	20øø	5
Summe		80

Also hat A $\frac{12}{80} = \frac{3}{20}$
B $\frac{16}{80} = \frac{1}{5}$
C $\frac{25}{80} = \frac{5}{16}$
D $\frac{16}{80} = \frac{1}{5}$
E $\frac{6}{80} = \frac{3}{40}$
F $\frac{5}{80} = \frac{1}{16}$

Wenn nun ein Gewinst oder Verlust unter diese Personen zu vertheilen ist; so darf die ganze Summe nur für jeden mit dem Bruch, der seinen Part ausdrückt, multiplicirt werden.

247 §.

Die Kaufleute pflegen gerne nach p. C. zu rechnen, und man kan der Rechnung ohne Schwierigkeit die Wendung geben, daß man zuerst die Antwort auf

die Frage erhält: Wieviel *p. C.* überhaupt gewonnen, oder verlohren sind. Die Frage ist denn eigentlich diese, welche Summe man auf jedes eingelegte 100 gewonnen, oder verlohren habe.

Wenn A 2400, B 1700, und C 1350 Rthl. zusammen gebracht hätten, und es wären in allen 7563 rthl. eingenommen: so rechnet man auf die Art

A 2400			
B 1700	ganze Einnahme	7563	thl.
C 1350	ganzer Einsatz	5450	
Summe des Einsatzes 5450		Gewinst	2113 thl.

Nun giebt die Regel Detri.

5450 — 2113 was 100?

Fac. $38\frac{84}{109}$.

Also ist der Gewinst $38\frac{84}{109}$ p. C.,

und es bekomt A $24 \times 38\frac{84}{109}$ p. C.

B $17 \times 38\frac{84}{109}$ p. C.

C $13\frac{1}{2} \times 38\frac{84}{109}$ p. C.

Man kan die Frage auch in dem Sinn nehmen: welche Summe man für jedes eingelegte 100 zurück bekomme? Dann würde man das letzte Exempel so berechnen müssen

5450 — 7563. Was 100?

Fac. $138\frac{84}{109}$.

Beydes läuft auf eins hinaus, denn die vorige Rechnung setzt voraus, daß ein jeder sein eingelegtes Capital schon vor der Vertheilung des eigentlichen Gewinstes, zurück bekommen habe. Ist nichts gewonnen; sondern vielmehr verlohren worden: so ist die

letzte

letzte Berechnung kürzer als die erste, weil man sonst den berechneten proportionirlichen Verlust erstlich von eines jeden Einsatz subtrahiren muß, bevor es sich ergiebt, wie viel er zurück fordern kan.

248 §.

Wenn ihrer mehrere ein Schiff mit Waaren befrachtet haben, und man ist genöthigt gewesen, wegen der Gefahr des Unterganges das Schiff zu lichten, und Waaren über Bord zu werfen: so verordnen die Gesetze, daß diejenigen, deren Waaren dadurch erhalten, und im Hafen glücklich eingebracht worden, denjenigen, oder diejenigen schadlos halten sollen, welche ihre Waaren, um das Schiff zu erhalten, Preis gegeben haben. Die gemeinschaftliche Bezahlung an diejenigen, welche den Verlust erlitten haben, heist die Haverey, oder das Werp-Geld, wie es die Holländer nennen. Beträgt nun der Werth der Waare der Kaufleute

A	2000 thl.	und es sind die den Kaufleuten D
B	4000 thl.	und E zugehörige Waaren ver-
C	6400 thl.	lohren gegangen; so ist die Fra-
D	4600 thl.	ge, wie viel jeder von A, B, C
E	3000 thl.	zur Ersetzung dieses Schadens bey-
Summ.	20000 thl.	tragen müsse, und wie viel D so wohl als E für sich zu empfangen haben?

Man berechne erst, wie viel p. C. überhaupt verlohren gegangen sind, oder, welches auf eins hinaus läuft, um wie viel jedes 100 durch den Verlust vermindert sey. Also schliesse man:

20000 — 12400 — 100?

Also behält

A	20 × 62 = 1240	und verliert	760
B	40 × 62 = 2480	= =	1520
C	64 × 62 = 3968	= =	2432
D	46 × 62 = 2852	Summe	4712 thl.
E	30 × 62 = 1860		
	Summe 12400 thl.		

D und E bekommen 4712 thl., und das war die Summe des Verlustes von A, B, und C.

249 §.

Mit der Vermischungs-Rechnung stehet die Alligations-Rechnung in einer ziemlich nahen Verwandtschaft, nur bestehet der Unterschied darin, daß bey jener das Verhältniß der gesuchten Theile des Ganzen gegen einander schon gegeben ist, und bey dieser erstlich gesucht werden muß, bevor man die Theile selbst finden kan. Die Gegenstände der Alligations-Rechnung sind nemlich solche Dinge, die für sich verschiedene Werthe haben, mit einander vermischt, aber einen von dem vorigen verschiedenen Werth bekommen. Z. E. Weine von verschiedener Güte, die mit einander vermischt einen Wein von mittler Güte geben. Verschiedene Metalle, als Silber und Kupfer; Gold und Silber, u. dgl. die mit einander zusammengeschmolzen ein Metall vom mittlern Werth geben, u. d. m. Eigentlich geht nun die Absicht der Regel Alligationis dahin, wenn die Werthe der Theile bekannt sind, und man soll ein neues Ganzes durch die Vermischung hervorbringen, das Verhältniß der Größe der Theile zu finden, wenn die Größe, und der Werth des Ganzen

gege-

gegeben worden, z. E.: Einer hat zwey, drey, ja mehrerley Sorten Wein von verschiedener Güte, die eine p. Aam 12 Thl., die andre p. Aam 9 Thl., er will von jeder solchen Sorte so viel zusammen auf ein Stückfaß ziehen, damit ein Wein p. Aam 10 Thl. herauskomme. Die Frage ist, wie viel Aam des einen Weins er auf ein Aam des andern rechnen müsse.

250 §.

Die Regel ergiebt sich leicht, nach welcher man in solchen Fällen rechnen muß, wenn man sich die Frage zuerst umgekehrt so vorstellt. Wenn nicht allein der Werth, sondern auch die Größe der Theile gegeben ist, die man zusammen vermischt: zu finden, was die dadurch zuwege gebrachte neue Masse für einen Werth bekomme. Man siehet leicht: daß die ganze zuwege gebrachte Masse so viel werth seyn müsse, als die vermischten Theile zusammengenommen. Bey Vergleichung des Werths aber der vermischten einfachen Massen mit der componirten Masse ist eigentlich die Frage: wie viel nun ein bestimtes Stück, z. E. 1 Pf., oder ein Mark bey Metallen, ein Aam bey Weinen, u. s. f. werth sey. Da man aber die Größe und den Werth des Ganzen weis: so ergiebt sich nach der Regel Detri leicht der Werth eines bestimten Theils.

Gesetzt einer hat 6 Aam Wein, a 12½ Thl. 8 Aam a 10¾ Thl., 11 Aam a 9 Thl., und ziehet solchen zusammen auf ein Stück, wieviel ist nun ein Aam von dem vermischten Wein werth? Man rechne so:

6 Aam

6	Aam	a $12\frac{1}{2}$ thl. thun	75	thl.
8	Aam	a $10\frac{3}{4}$ thl. thun	86	thl.
11	Aam	a 9 thl. thun	99	thl.
25	Aam	thun	260	thl.

Wie viel also 1 Aam.

Antw. $\frac{260}{25} = 10\frac{2}{5}$ thl.

251 §.

Man kan hieraus leicht folgende Sätze schliessen.

Wenn zwo, oder auch mehr Sorten, die gleichen Gehalt haben, vermischt werden: so behält das mixtum eben den Gehalt.

Wenn demnach ein mixtum M, das aus den Theilen, *a*, *b*, *c*, u. s. f. besteht, den Gehalt P hat: so behält das mixtum aus den Theilen *na*, *nb*, *nc*, eben den Gehalt. Aus 12, 16, und 22 Aam Wein von den vorigen Werthen, wird noch ein Wein p. Aam $10\frac{2}{5}$ Thl.

Vermischt man Sorten von verschiedenem Werth oder Gehalt: so vermindern die schlechtern Sorten den Werth des mixti, und bessere Sorten vergrössern ihn. Also komt für das mixtum allemahl ein **Mittel-Werth**, oder **Mittel-Gehalt** heraus.

252 §.

Nun sey die Frage umgekehrt diese: Ein Aam des Weins A kostet 10 Thl., und ein Aam des Weins B kostet 15 Thl., man will einen Wein M haben, davon 1 Aam 13 thl. kosten soll: wie viel muß man von jeder Art des Weins A und B in die Vermischung bringen?

Man setze, es müssen x Aam des Weins A zu y Aam des Weins B genommen werden, und berechne nun zuerst den Preis von beyden Theilen, nemlich

1 Aam von A — 10 Thl., was x Aam?

Antw. $10x$ thl.

1 Aam von B — 15 Thl., was y Aam?

Antw. $15y$ thl.

Nach der Vermischung hat man $(x+y)$ Aam des Weins M. Auch hievon berechne man den Preis.

1 Aam soll kosten 13 thl., was $(x+y)$ Aam?

Antw. $13(x+y)$ thl.

Vermöge der Regel des 250 § muß dieser Preis der Summe der vorigen beyden Preise gleich seyn. Also hat man:

$$10x+15y=13(x+y).$$

Hieraus folgt

$$10x+15y=13x+13y$$
$$15y-13y=13x-10x,$$

oder $(15-13)y=(13-10)x$.

Also $(15-13) : (13-10)=x:y$.

D. i. zu $(15-13)$ Maaß des Weins A müssen $(13-10)$ Maaß des Weins B genommen werden.

Hieraus folgt die gemeine Regel:

Man schreibe den bessern und schlechtern Preis unter einander, und den verlangten mittlern Preis zur Linken. Zur Rechten setze man bey dem bessern Preis den Unterschied des schlechtern vom mittlern, und beym schlechtern Preis den Unterschied des bessern vom mittlern: so zeigen diese Differenzen das Verhältniß der Theile, so man sucht, an. Die Berechnung würde demnach so stehen:

Verlangter	Preis von A 10 thl.	2 Verh. der
Mittelpr. 13 thl.	Preis von B 15 thl.	3 Theile.

D. i., man muß auf 2 Theile des Weins A 3 Theile des Weins B rechnen.

253 §.

Will man nun einen Wein von mittler Güte machen: so nimt man entweder eine gewisse Menge der schlechtern oder bessern Sorte, willkührlich, und berechnet nach der Regel Detri, wie viel von der andern Sorte dazu genommen werden müsse: oder, man setzt voraus, man wolle eine gewisse Menge der mittlern Sorte machen, und berechnet nun nach der Vermischungs-Rechnung (244 §), wie viel von jeder Sorte des bessern, und schlechtern zu rechnen sey.

Exempel der 1 Art.

Man hat 30 Aam des Weins A genommen, wieviel Aam des Weins B gehören dazu, um den Wein M zu bekommen

2 Aam von A geben 3 Aam von B, wie viel 30?

Antw. $\frac{30}{2} = 45$ Aam.

Also bekomt man in allen 75 Aam des Weins M.

Exempel der 2 Art.

Man will 75 Aam des Weins M machen, wie viel Aam von A und B gehören dazu?

zu 2 von A
gehören 3 von B

5 von M geben 2 von A, wie viel 75?

Antw. 30 Aam.

5 " " 3 von B wie viel 75?

Antw. 45 Aam.

Summe 75 Aam.

Die

Die ganze Rechnung kan man nun nach der Regel des 250 § prüfen. Man schliesse:

30 Aam	a 10 thl.	thun	300 thl.
45 Aam	a 15 thl.	thun	675 thl.
75 Aam		thun	975 thl.

Was 1 Aam?

Antw. $2\frac{7}{7}\frac{5}{5} = 13$ thl.

254 §.

Diese Alligations-Regel läst sich auch auf solche Fälle anwenden, da man aus mehr, als zwo verschiedenen Massen eine neue durch die Vermischung verlangt. Folgendes Exempel wird die Sache ohne Schwierigkeit ins Licht setzen.

In einem Gießhause hat man in Vorrath von feinem Metall den Centner A zu 40, B zu 30, und C zu 24 Thl. Hieraus soll ein Werk von 60 Centnern gegossen werden, welches aber (ohne Arbeitslohn) nicht höher als auf 2000 Thl. kommen soll: die Frage ist; wie viel von jedem Metall genommen werden müsse?

Man suche zuerst den Preis eines Centners der vermischten Masse, um den Werth derselben mit dem Werth der dreyen einfachen vergleichen zu können.

60 C. — 2000 Thl. Was 1 C.

6 | 33$\frac{1}{3}$ Thl.
18 |

20
6
18

2

Man suche ferner den Werth eines Centners einer Masse, die aus zwoen der gegebenen, z. E. B und C durch die Vermischung käme, nach dem 250§. Da es hier gleich viel ist, wie viel man von jeder Art nimt: so wird die Rechnung kürzer, wenn man von jeder Art gleich viel nimt.

1 C. von B thut	30	thl.
1 C. von C thut	24	thl.
2 C.	54	thl.

Also thut ein Centner des mixti aus B und C 27 thl. Man nenne dies mixtum M: so ist es eben so viel, als sollte man diese Frage beantworten:

Man hat das Metall A den Centn. zu 40, und das Metall M den C. zu 27 Thl.: Wie viel von jeder Art gehören zum mixto den C. zu $33\frac{1}{3}$ Thl. und dies wird wie im 252 § berechnet. Also könnte die Rechnung so geführt werden

	A	40	A	40	$6\frac{1}{3}$ von A
$33\frac{1}{3}$	B	30	M	27	$6\frac{2}{3}$ von M.
	C	24			

Also $3\frac{1}{3}$ von B
und $3\frac{1}{3}$ von C

weil M von B und C gleich viel enthält. Also ist das Verhältniß der Theile $6\frac{1}{3}$ von A, $3\frac{1}{3}$ von B, $3\frac{1}{3}$ von C, oder 19 von A, 10 von B, 10 von C. Demnach giebt die Vermischungs-Regel:

19 von A
10 von B
10 von C

39 — 19—60? Antw. $29\frac{3}{13}$ C. von A.
39 — 10—60? = $15\frac{5}{13}$ C. von B.
also auch $15\frac{5}{13}$ C. von C.

Summe 60 C.

Die Probe von der Richtigkeit der Rechnung giebt der 250 §.

$29\frac{3}{13}$	a	40	thl. thun	1169 $\frac{3}{13}$	thl.
$15\frac{5}{13}$	a	30	= =	461 $\frac{7}{13}$	thl.
$15\frac{5}{13}$	a	24	= =	369 $\frac{3}{13}$	thl.

Summe 2000 thl.

255 §.

Man wird leicht von selbst darauf verfallen, daß man bey eben dem Verfahren ganz andre Resultate der Rechnung hätte herausbringen können, die doch alle den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge thun. So war es ganz willkührlich, in welchem Verhältniß man das mixtum M aus B und C machen wollte. Man hätte auf 2 Theile von B, 3 Theile von C rechnen, und überhaupt jedes andre Verhältniß nehmen können. Hätte man zu 2 Theilen von B, 3 von C genommen, so hätte man müssen den Werth von M so bestimmen,

2 C. von B thun 60 thl.
3 C. von C thun 72 thl.

5 C. 132 thl.

Also 1 C. von M 5 | 26 $\frac{2}{5}$ thl.
26 $\frac{2}{5}$ thl. 10 |

32
5
30
2

Demnach giebt die Rechnung.

	A	40	40	6 $\frac{14}{15}$ von A.
33 $\frac{1}{3}$	B	30	26 $\frac{2}{5}$	6 von M.
	C	24		

Nun müste man 6 nach dem Verhältniß 2:3 so theilen

5—2—6?

Antw. 2 $\frac{2}{5}$ von B
also 3 $\frac{3}{5}$ von C.

Demnach wäre der Theile von A, B, C, Verhältniß 6 $\frac{14}{15}$, 2 $\frac{2}{5}$, 3 $\frac{3}{5}$, oder 104, 36, 54, und dies gäbe

32 $\frac{32}{194}$ C. von A
11 $\frac{26}{194}$ C. von B
16 $\frac{136}{194}$ C. von C

Summe 60 Centner.

Man hätte können anfangs ein mixtum aus A und B, oder aus B und C voraussetzen, in welchem Verhältniß man gewolt, und dies alles hätte unzählig viele verschiedene Antworten hervorgebracht, die insgesamt der Sache ein Genüge thun.

256 §.

256 §.

Man wendet die Alligations-Regel am meisten auf die Gold- und Silber-Rechnungen an, dergleichen beym Münzwesen, und andern Gold- und Silber-Arbeiten vorkommen. Damit man sich auch in diese Arten von Rechnungen finden lerne, muß man folgendes wissen. Silber mit Kupfer legiren heist Silber mit Kupfer zusammen schmelzen. Gold mit Silber legiren heist Gold mit Silber zusammen schmelzen, welches letztere denn entweder fein, oder schlecht Silber seyn kan. Fein Gold, und Silber ist dasjenige, womit kein Zusatz andrer Metalle vermischt ist. Im 199 § ist schon angeführt, daß man sich beym Gold und Silber des Cöllnischen Mark-Gewichts bediene, und daß 1 Mark fein Gold oder Silber 16 Loth halte. Wenn 15 Loth fein Silber mit 1 Loth Kupfer, oder 14 Loth Silber mit 2 Loth, u. s. f. legirt wird: so heist es 15, 14 löthig Silber, u. s. f. Eine Mark 12 löthig Silber hat also 12 Loth fein, und 4 Loth Zusatz. Da beym Golde die Mark in 24 Karatt getheilt wird: so erhellet leicht, was 23 Karattiges, 22 Karattiges Gold u. s. f. sey, wenn es nemlich auf 23 Karatt oder 22 Karatt, 1 Karatt, oder 2 Karatt Zusatz hat, u. s. f.

257 §.

Wenn nun ein Stück 13 löthig Silber 30 Mark schwer ist: so giebt die Regel Detri leicht, wie viele Mark fein darin enthalten sind. Man schliest:

1 Mk. — 13 loth. Wie viel 30 Mk?

30

390 | 24 Mk. 6 loth.
16 |
32 |

70
16
64

6

Weis man umgekehrt, daß in 25 Mk. schlecht Silber $21\frac{1}{2}$ Mk. fein enthalten sind: so findet man, wie viel löthig es sey, auf die Art:

25 Mk. — $21\frac{1}{2}$ Mk. fein. Wie viel 1 Mk.?

16

129
21

339 | $13\frac{14}{25}$ löthig.
25 |

89
25
75

14

Wenn man den Werth des feinen Silbers und des Zusatzes, z. E. von Kupfer weis: so läst sich der Werth des 15, 14, 13 löthigen Silbers u. s. f. nach dem 250 § berechnen.

258 §.

Die Münzmeister, auch andre Gold- und Silber-Arbeiter nennen es den Tiegel beschicken, wenn man ein gewisses Gewicht Gold oder Silber von

verlangtem Gehalt zuwege bringen soll, und die Frage ist, wie viel von jeder Art des Silbers, oder Goldes, auch andern Metalles dazu erfodert werde. Alle hieher gehörige Rechnungen gründen sich auf die Regeln des 252, 253, und 254§.

Einer hat $37\frac{1}{2}$ Mk. $14\frac{1}{2}$ löthiges Silber, und will dasselbe mit einem andern 9 löthigen Silber beschicken, damit es $12\frac{1}{2}$ löthig werde. Man frägt, wie viel er zu jenen $37\frac{1}{2}$ Mk. von diesem andern Silber zusetzen müsse?

$$12\tfrac{1}{2} \;\begin{matrix} 14\frac{1}{2} \\ 9 \end{matrix}\;\Big|\;\begin{matrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{matrix}\;\Big|\;\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix}$$

$$7 : 4 = 37\tfrac{1}{2}\text{ Mk.} : \frac{4 \times 37\frac{1}{2}\text{ Mk.}}{7}$$

Dies giebt den Zusatz $21\frac{3}{7}$ Mk.

Probe $37\frac{1}{2}$ Mk. a $14\frac{1}{2}$ Loth fein thut $543\frac{3}{4}$ L.
$21\frac{3}{7}$ Mk. a 9 Loth fein thut $192\frac{6}{7}$

$58\frac{13}{14}$ $\qquad$ $736\frac{17}{28}$

Also kommen $\frac{736\frac{17}{28} \times 2}{58\frac{13}{14} \times 2} = 12\frac{1}{2}$ für 1 Mk. des mixti.

259 §.

Will man mehr, als zweyerley Metall von verschiedenem Gehalt mit einander vermischen: so wird die Rechnung nach der Vorschrift des 254§ angestellt, und man weis aus dem 255§, daß in allen solchen Fällen unzählig viele verschiedene Antworten können herausgebracht werden, die insgesamt der Aufgabe ein Genüge thun. Wenn demnach in solchen Fällen die Antworten auf eine, oder einige wenige eingeschränkt werden: so rührt es von besondern Ursachen her, wenn man z. E. die eine Mischung

schung vortheilhafter brauchen kan, als die andre; von dem einen Metall mehr zur Hand hat, von dem andern weniger, u. s. f. Mehr hieher gehörige Exempel können hier, Weitläuftigkeit zu vermeiden, nicht beygebracht werden. Man sehe Haasens vollständigen Münzmeister und Münz-Wardein, den 1 Th. v. Clausbergs Dem. Rech. 1284 u. f. S.

Der XVI. Abschnitt.

Von der Regel Conci.

260 §.

Wenn man eine Vergleichung zwischen allen den Rechnungs-Aufgaben anstellet, die im vorigen Abschnitt als zur Alligations-Regel gehörige sind abgehandelt worden: so ergiebt sich, daß man sie insgesamt in zwo Classen bringen könne. Zur ersten Classe gehören diejenigen, bey welchen nur überhaupt das Verhältniß der Theile eines gewissen mixti verlangt wird, ohne daß grade eine bestimte Menge dieses mixti zuwege gebracht werden soll. Dahin gehört die Aufgabe des 252 § so wie sie da ausgedruckt ist. Zur zwoten Classe kan man diejenigen rechnen, bey welchen grade eine bestimte Menge des mixti verlangt wird. Dahin gehört die zwote Art der Aufgaben im 253 §. Die im vorigen Abschnitt vorgeschriebene Methode, die zur letztern Classe gehörigen Aufgaben, aufzulösen, kam darauf an, daß man zuförderst das Verhältniß der

Theile

Theile nach der eigentlichen Alligations-Regel des 252 § suchte, und alsdenn die Vermischungs-Regel anwendete. Siehet man die Natur dieser Aufgaben genauer an: so ergiebt sich bald, daß man noch auf einem andern Wege zu eben dem Resultat gelangen könne.

261 §.

Um dieses desto deutlicher zu zeigen soll die Aufgabe des 252 § wieder zum Exempel dienen. Es war diese:

Einer hat die Art Wein A zu 10, und die Art B zu 15 Thl. p. Aam; er will 75 Aam durch die Vermischung machen so, daß ein Aam des vermischten 13 Thl. kömt. Wie viel muß er von jeder Art nehmen?

Man erwege, daß die Anzahl der Aame des Weins A und des Weins B, die man sucht, zusammen 75 Aam austragen sollen. Wenn also x und y diese gesuchten Zahlen sind: so muß $x+y=75$ seyn. Man erwege ferner, daß der Preis von x Aam des einen und y Aam des andern Weins zusammen den Preis von 75 Aam des vermischten geben müssen. Man weis den Preis eines Aams von jeder Art: wenn man hiemit die Zahl der Aame multiplicirt; so hat man den Preis der gegebenen Anzahl Aame. So ist hier $10x$ der Preis von x Aam des Weins A, $15y$ der Preis von y Aam des Weins B, und $13 \times 75=975$ der Preis von 75 Aam des vermischten Weins. Also muß $10x+15y=975$ seyn. Demnach komt die ganze Sache darauf an:

Man soll eine gegebene Zahl 75, in zwo andre x und y theilen, die so beschaffen sind, daß, wenn die eine x mit dem Factor 10, die

andre y mit dem Factor 15 multiplicirt wird, die Summe der Producte einer andern gegebenen Zahl 975 gleich sey.

262 §.

Hieraus läst sich nun leicht herleiten, wie man in allen ähnlichen Fällen die Rechnung selbst anstellen könne. Es sey die Zahl, welche man theilen soll $75 = N$. Der kleinere Factor $10 = f$, der größere $15 = g$, die Summe der Producte $975 = S$: so hat man

$x + y = N$, und $x = N - y$.

Ferner $fx + gy = S$, also

$f(N - y) + gy = S$,

oder $fN - fy + gy = S$.

Dies giebt $gy - fy = S - fN$

und $y = \frac{S - fN}{g - f}$.

Im angenommenen Exempel also ist $y = \frac{975 - 10 \times 75}{15 - 10}$, und die Rechnung kan man so führen:

75	15	975	
10	10	750	
750	5	225	45 = y
		div. 5	

also $x = 75 - 45 = 30$, wie im 253 §. Es liegen in diesem allgemeinen Ausdruck eben die Regeln, welche man in Hrn. von Clausb. dem. Rech. 1357 §. u. a. m. findet.

Eben so berechnet man nun auch folgendes Exempel: Einer hat 10 und 15 löthiges Silber, und will

75 Mark

75 Mark 13 löthiges haben, wie viel Mk. muß er von jeder Art zusammen schmelzen? Die Rechnung giebt 45 Mk. 15 löthiges und 30 Mk. 10 löthiges. Es sind die gegebenen Zahlen in beyden Exempeln einerley, also müssen auch einerley gesuchte Zahlen herauskommen. Man siehet aber leicht, daß sich die gegebenen Zahlen, wie man will, verändern lassen, und die Rechnung übrigens nach eben den Regeln geführt werden könne.

263 §.

Man kan auf eine ähnliche Art mit denjenigen Aufgaben umgehen, da aus mehr, denn zwo verschiedenen Massen eine neue durch die Vermischung verlangt wird. Es komt auch hier die Sache eigentlich darauf an, daß eine Zahl in mehr, als zweene Theile getheilt werden soll, von der Beschaffenheit, daß, wenn man jeden derselben mit einem besondern gegebenen Factor multiplicirt, die Summe der Producte einer andern gegebenen Zahl gleich sey.

Es sey z. E. die Zahl 30 in drey unterschiedene Theile zu theilen, daß, wenn der erste mit 10, der andre mit 12, der dritte mit 15 multiplicirt wird, die Summe $=390$ sey.

Man setze wie vorhin die zu theilende Zahl $=N$, die Factoren nach der Ordnung ihrer Größe, f, g, h, die gesuchten Theile x, y, z die Summe der Producte S: so hat man

$x+y+z=N$, und $x=N-y-z$. Ferner

$fx+gy+hz=S$, also $fN-fy-fz+gy+hz=S$, oder $(g-f)y+(h-f)z=S-fN$. Also wird $y=\frac{S-fN}{g-f}-\frac{(h-f)z}{g-f}$.

Nun

Nun kan man für z eine Zahl willkührlich annehmen, z. E. 16: so giebt die Rechnung $y = \frac{390-10\times 30}{12-10} - \frac{15-10}{12-10}\cdot 16 = 45-40 = 5$, und $x = 30-5-16 = 9$.

264 §.

Aus dem 255 § ist schon bekannt, daß die Aufgaben von der letztern Art auf unzehlig viele verschiedene Arten beantwortet werden können, und eben das ergiebt das gegenwärtige Verfahren. Wenn man für z eine andre Zahl genommen hätte: so wären für y und x ebenfalls ein paar andre Zahlen herausgebracht worden. Ob aber gleich, überhaupt zu sagen, unzehlig viele verschiedene Antworten statt haben: so können dennoch die hieher gehörigen Aufgaben solche Neben-Umstände enthalten, welche die Antworten auf eine bestimte Anzahl einschränken, wie auch im 255 § bereits angeführet worden. Zu diesen Umständen gehören nun vornemlich die Fälle, **wenn die Antworten in ganzen Zahlen verlangt werden.** Wenn man nemlich für z gleich eine ganze Zahl annimt; so kan es dennoch seyn, daß für y und x keine ganze Zahlen kommen. Inzwischen bleiben auch bey dieser Einschränkung noch sehr oft verschiedene Antworten möglich, so, daß man nicht im Stande ist, genau zu sagen, welche Antwort der Proponent eigentlich haben will.

Ueberdem muß man die in ganzen Zahlen möglichen Antworten, durch solche Hülfsmittel suchen, die sich eigentlich nicht auf die Größe der Zahlen, sondern auf andre Eigenschaften derselben gründen;

und

und deswegen muß derjenige es oft auf blosse Versuche ankommen lassen, dem diese Eigenschaften der Zahlen nicht bekannt sind, oder nicht beyfallen. In diesem Betracht hat man die Regel, nach welcher die gesuchten Theile herausgebracht werden müssen, die Regel Conci oder die Blind-Rechnung genannt. Man verstehet darunter eigentlich diejenigen Kunstgriffe, wodurch man nicht allein die Antwort in ganzen Zahlen herausbringt; sondern zugleich in den Stand gesetzt wird, zu bestimmen, wie viele Antworten in ganzen Zahlen überhaupt möglich sind.

265 §.

Der im 263 § gefundene Ausdruck $(g-f)y+(h-f)z=S-fN$, leitet auf die Rechnungsschlüsse, nach welchen man y und z in ganzen Zahlen suchen muß. Denn hat man y und z in ganzen Zahlen, so wird auch $x=N-y-z$ eine ganze Zahl.

Man suche also $S-fN$; dies wird im vorigen Exempel die Zahl 90. Hierauf subtrahire man den kleinsten Factor f von jedem der beyden größern, damit man die beyden Differenzen $g-f=2$, und $h-f=5$ erhalte. Die gefundene Zahl $S-fN=90$ zertheile man in zwey Stücke, die so beschaffen sind, daß man das eine Stück durch $g-f$, das andre durch $h-f$ ohne Rest dividiren könne: so sind y und z die Quotienten. Wie man nun bey dieser Zertheilung zu Werke gehen müsse, davon lassen sich keine völlig bestimte, und sichere Regeln geben. Man muß vielmehr die in solcher Absicht nöthigen Rechnungsschlüsse auf diejenigen Eigenschaften der Zahlen gründen, die im V und XI Abschnitt erwiesen sind.

Im

Im vorigen Exempel wird ein Stück von 90 verlangt, welches in 5 aufgehen soll, nemlich $(h-f)z$, und 90 selbst geht in 5 auf. Also muß auch das andre Stück $(g-f)y$ in 5 aufgehen (73 §). Dies letzte Stück soll auch in 2 aufgehen, deswegen muß es auch in 2×5 oder in 10 aufgehen, weil 2 und 5 kein gemeines Maaß haben. Daher kan man nur folgende Theile nehmen.

10	20	30	40
80	70	60	50

Die würkliche Division giebt.

5	10	15	20
16	14	12	10

Für diese vier Fälle würde $x =$

9	6	3	0.

Der letzte Fall ist der Voraussetzung nicht gemäß, vermöge welcher keiner von den gesuchten Theilen $= 0$ seyn soll, also bleiben überhaupt nur drey mögliche Antworten in ganzen Zahlen.

266 §.

Ein Exempel von der Art, da die Antwort schlechthin in ganzen Zahlen verlangt wird, würde folgendes seyn:

Einer kauft eine Anzahl Ochsen, Kühe, und Schaafe, zusammen 100 Stück, er bezahlt für jeden Ochsen 10 thl., für jede Kuh 5 thl., für jedes Schaaf $\frac{1}{2}$ thl., für alle zusammen 100 thl., die Frage ist, wie viel Stück er von jeder Art bekommen habe.

Es sey die Anzahl der Schaafe x, der Kühe y,

der

der Ochsen z: so wird $f=\frac{1}{2}$, $g=5$, $h=10$, $N=100$, $S=1000$. Also

$$S-fN=50.$$

Da nun $4\frac{1}{2}.y+9\frac{1}{2}.z=50$ seyn soll: so muß man 50 in 2 Theile eintheilen, davon der erste durch $\frac{9}{2}$, der andre durch $\frac{19}{2}$ theilbar ist. Man kan hier aber mit mehr Bequemlichkeit rechnen, wenn man die Brüche wegschaft, und den Ausdruck $4\frac{1}{2}.y+9\frac{1}{2}.z=50$ mit 2 multiplicirt. Auf die Art erhält man

$$9y+19z=100.$$

Also zerfälle man 100 in zweene Theile, davon der eine durch 9, der andre durch 19 theilbar ist. Alle durch 9 theilbare Theile von 100 sind

9. 18. 27. 36. 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99.

Diese geben für 19z die Zahlen

91. 82. 73. 64. 55. 46. 37. 28. 19. 10. 1.

Unter allen diesen Zahlen ist keine andre als 19 selbst durch 19 theilbar. Diesemnach wird $z=1$, $y=9$, $x=90$, und die Antwort ist: 1 Ochse, 9 Kühe, 90 Schaafe. Mehr, als diese eine Antwort findet also in dem gegenwärtigen Exempel nicht statt.

Die allgemeine Rechenkunst
oder
die Buchstaben-Rechnung
mit ihrer Anwendung auf die gemeine Rechenkunst.

Der I. Abschnitt.
Von den vier allgemeinen Rechnungsarten.

1 §.

Wenn zwo Größen eine solche Beziehung gegen einander haben, daß die eine eben so viel abnimt, als die andre wächst, und umgekehrt: die erste allemahl um eben so viel anwächst, als die andre abnimt: so heissen sie entgegengesetzte Größen. Wer seine Schulden vergrößert, vermindert eben dadurch sein Vermögen, und wer die Schulden vermindert, vergrößert sein Vermögen. Würkliches Vermögen, und Schulden sind demnach entgegengesetzte Größen. Der Weg, welchen ein Schiff auf einer Seereise zurückgelegt hat, wird durch einen vom Sturm verursachten Rückgang vermindert, und der zurückgelegte Weg wächst wieder, indem das Stück des Weges abnimt, um welches das Schiff zurück getrieben worden.

worden. Fortgang und Rückgang sind demnach ebenfalls entgegengesetzte Größen. In der ausübenden Mathematik kommen sehr viele Fälle von dieser Art vor.

2 §.

Dergleichen entgegengesetzte Größen sind also für sich betrachtet als Größen von verschiedener Art, oder solche, die verschiedene Nahmen haben, anzusehen (146 §. R.) Sie stehen aber allemahl unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff, und können insoferne, als Größen von einerley Art betrachtet werden. Fortgehen, und Zurückgehen sind beydes Bewegungen. Schulden, und würkliches Vermögen gehören beyde zu demjenigen, was man die Haabseligkeit eines Menschen nennet. Im eigentlichen Verstande lassen sich nur solche Größen addiren, die von einerley Art sind (19 §. R.) Also kan man entgegengesetzte Größen, z. E. Schulden, und würkliches Vermögen in dem Verstande nicht addiren, in welchem dies Wort in der gemeinen Rechenkunst gebraucht wird. So sind 700 rthl. Vermögen, und 300 rthl. Schuld weder 1000 rthl. Vermögen, noch 1000 rthl. Schuld. Ein Schiff, das 700 Meilen vorwärts, und 300 Meilen rückwärts gesegelt hat, ist weder 1000 Meilen vorwärts, noch 1000 Meilen rückwärts gekommen. Der eigentliche Weg, um welchen es sich vom Hafen entfernet hat, beträgt 400 Meilen. Man könnte dies das Resultat der beyden entgegengesetzten Wege nennen: so würde im vorigen Exempel 400 rthl. Vermögen, das Resultat von 700 rthl. Vermögen, und 300 thl. Schulden, seyn. Aber man braucht auch hier zu nicht geringer Verkürzung vieler Rechnungen, die

sich auf ähnliche Betrachtungen gründen, das Wort Summe. Demnach ist die Summe zwoer entgegengesetzten Größen eigentlich dasjenige, was in der größern übrig bleibt, nachdem sie durch die entgegengesetzte Kleinere, um ein dieser letztern gleiches Stück vermindert worden. Entgegengesetzte Grössen addiren, heist nun diese ihre Summe suchen.

3 §.

Man will aber, nachdem diese Summe gefunden worden, allemahl zugleich wissen, ob sie ein Stück der einen, oder der andern, von beyden entgegengesetzten Größen sey, und dies müste also jedes mahl durch ein besondres Wort angezeiget werden. So würden die im vor. § gebrauchten Exempel etwa so stehen:

700 rthl. Vermög.	700 Meilen vorw.
300 rthl. Schuld.	300 Meilen rückw.
Sum. 400 rthl. Vermög.	S. 400 Meil. vorw.

Eben so würde man folgende Exempel rechnen.

1000 rthl Vermög.	200 Meil. vorw.
1500 rthl Schuld.	300 Meil. rückw.
Sum. 500 rthl Schuld.	Sum. 100 Meil. rückw.

4 §.

Um nun die Weitläuftigkeit zu vermeiden, daß man nicht immer nöthig habe, der Summe den Nahmen beyzufügen, dienen folgende Betrachtungen. Wenn vorausgesetzt wird, daß von dem Hauptbegriff die Rede sey, den beyde entgegengesetzte Größen gemein haben: so kan man jede derselben durch Verneinung der ihr entgegengesetzten anzeigen. Denn durch Verneinung der einen wird nothwendig die an-

dre gesetzt. Diejenige von zwoen entgegengesetzten Größen, welche man durch Verneinung der andern anzeigt, heist eine negative, oder verneinte Größe. Man sollte richtiger sagen: eine verneint ausgedrückte Größe. Die ihr entgegengesetzte wird sodann ohne Verneinung angezeigt, und man nennt sie eine positive, oder bejahte Größe, eigentlich, eine bejaht, oder positiv ausgedrückte Größe; denn das bejahte, oder verneinte, ist hier nur in dem Ausdruck zu suchen, der die Größe bezeichnet. Ein nicht vorwärts zurückgelegter Weg von 3 Meilen, sind 3 Meilen rückwärts, und ein nicht rückwärts zurückgelegter Weg von 3 Meilen, sind 3 Meilen vorwärts.

5 §.

Der bejahten Größe, das ist, derjenigen, welche man ohne Verneinung anzeigen will, setzt man das Zeichen +, der entgegengesetzten verneinten das Zeichen — voran, und läst sodann die Nahmen, welche die entgegengesetzte Beziehung andeuten, überall weg. Soll demnach Vermögen, oder vorwärts zurückgelegter Weg, mit + bezeichnet werden: so muß man Schuld, und rückwärts zurückgelegten Weg mit — bezeichnen. Man kan es auch umgekehrt machen, nur muß man die einmahl angenommene Voraussetzung nicht ändern, so lange man mit Auflösung einer und eben derselben Aufgabe beschäftigt ist.

6 §.

Braucht man diese Zeichen bey den Exempeln des 3 §: so wird die Rechnung so aussehen.

+ 700 rthl.	+ 700 Meil.
− 300 rthl.	− 300 Meil.
S. + 400 rthl.	S. + 400 Meil.
+ 1000 rthl.	+ 200 Meil.
− 1500 rthl.	− 300 Meil.
S. − 500 rthl.	S. − 100 Meil.

Es giebt sich nämlich das Zeichen der Summe nun allemahl von selbst. Man spricht auch hier das Zeichen + durch plus, und das Zeichen − durch minus aus, und man sieht leicht, daß die im 20 § der Rechenkunst festgesetzte Bedeutung dieser Zeichen dabey zum Grunde liege, obgleich die Bedeutung dieser Zeichen hier allgemeiner wird. Hier nämlich zeigen sie überhaupt jede entgegengesetzte Beziehung zwoer Größen gegen einander an, so, wie sie dort insbesondre vermehren, und vermindern bezeichneten. Eine mit − bezeichnete Größe ist hier also nicht allemahl eine Größe, die man abziehen soll. Denn eine mit + bezeichnete Größe vermindert so gut die ihr entgegengesetzte mit − bezeichnete, als diese jene vermindert.

7 §.

14 F. des 1 Th. Dieser Begriff von der **allgemeinen Addition** wird durch die Anwendung auf die Geometrie am besten erläutert. Wie man zu einer graden Linie AB eine andre F addire, ist im 42 § der Geom. gewiesen worden. Der mit dem Halbmesser F aus B beschriebene Kreis schneidet AB zweymahl in C und D. Das Stück BC liegt mit AB nach einerley Richtung, und vermehrt AB. Aber BD liegt nach entgegen=

gegengesetzter Richtung, und vermindert AB. Demnach ist AC von + AB, und + BC, oder AD von + AB und — BD die Summe in dem Verstande des 2 §. Wäre *a*B statt AB gegeben: so würde der Durchschnittspunct D linker Hand des Puncts *a* fallen, und dies anzudeuten, müste vor *a*D das Zeichen — stehen, so daß — *a*D die Summe von + *a*B, und — BD wird. Die Linie — BD zu + *a*B addiren, heist die Größe und Lage der Entfernung des Puncts D von *a* suchen, die sich ergiebt, wenn man von *a* eine Linie *a*B vorwärts, und eine andre BD von B rückwärts legt.

8 §.

Nicht entgegengesetzte Größen lassen sich in eben dem Verstande zusammen addiren, wie man Größen von einerley Art, oder die einerley Nahmen haben, zusammen addirt. Die Summe bekomt mit den addirten Größen einerley Zeichen. Man übersieht also ohne Schwierigkeit, was folgende Berechnung sagen will.

— 13 rthl.	+ 3 rthl.
— 25 rthl.	+ 19 rthl.
— 17 rthl.	+ 4 rthl.
S. — 55 rthl.	S. + 26 rthl.

Hier können die mit + bezeichneten Thl. Einnahme, die mit — bezeichneten Ausgabe, oder umgekehrt: jene können Ausgabe, diese Einnahme bedeuten u.s.f.

So ist in der 14 F. d. 1 Th. + AC die Summe von + AB und BC. Hätte man die Linien, welche gegen A linker Hand liegen, mit + bezeichnet: so wäre nun — AC die Summe von — AB, und — BC.

9 §.

Addiren und Subtrahiren sind in der gemeinen Rechenkunst entgegengesetzte Rechnungsarten. Die Addition macht aus zweenen Theilen ein Ganzes. Die Subtraction nimt aus einem gegebenen Ganzen einen gegebenen Theil weg, oder vermindert das Ganze um diesen Theil. Eine Größe D von einer andern A subtrahiren ist also eben so viel, als $-D$ zu A addiren, in dem Verstande des 2 §. In der allgemeinen Rechenkunst bleibt die Subtraction ebenfalls eine solche Operation, welche eine gegebene Größe um eine andre gegebene verändert, und zwar auf eine dem addiren entgegengesetzte Art. Eine Größe von einer andern subtrahiren heist also auch im allgemeinen Verstande eine Größe, die jener entgegengesetzt ist, zu dieser im allgemeinen Verstande addiren.

10 §.

Wenn demnach beyde Größen einerley Zeichen haben, und die zu subtrahirende Größe kleiner, als die andre ist: so hat die Sache weiter nicht die geringste Schwierigkeit. Hieher würden folgende Exempel gehören.

+ 1000 rthl.	− 1000 rthl.
+ 750 rthl.	− 750 rthl.
Rest + 250 rthl.	Rest − 250 rthl.
+ 30 Meil.	− 30 Meil.
+ 12 Meil.	− 12 Meil.
Rest + 18 Meil.	Rest − 18 Meil.

177 F. Man ziehe durch A eine grade Linie von unbestimter Länge, und bezeichne mit + was gegen A rechter

rechter Hand liegt, mit —, was linker Hand liegt: so ist + AC die Differenz von + AB und + BC. Denn + BC von + AB subtrahiren heist BC von B rückwärts legen, und dann die Größe und Lage von AC angeben. Eben so ist — Aγ die Differenz von — Aβ und — βγ. Denn — βγ von — Aβ subtrahiren heist an β eine Linie βγ, nicht rückwärts legen, und die Größe, und Lage von Aγ angeben.

11 §.

Wäre das, was man subtrahiren soll, mehr als dasjenige, wovon man es subtrahiren soll: so könnte dies einigen Anstoß verursachen. Denn es ist gewiß, daß man das größere vom kleinern in dem Verstande nicht subtrahiren könne, in welchem dies Wort in der gemeinen Rechenkunst gebraucht wird. Wenn man inzwischen nach dem Begriff der allgemeinen Subtraction des 9 § zu Werke gehet: so komt zum Rest der Ueberschuß des größern über das kleinere mit dem entgegengesetzten Zeichen, wie in folgenden Exempeln.

+ 100 rthl.	+ 100 Meil.
+ 150 rthl.	+ 120 Meil.
Rest — 50 rthl.	Rest — 20 Meil.
— 36 rthl.	— 27 Meil.
— 90 rthl.	— 46 Meil.
Rest + 54 rthl.	Rest + 19 Meil.

12 §.

Mit dieser Sache hat es nun eigentlich folgende Bewandniß. Eine von zwoen entgegengesetzten

Größen nimt allemahl um eben so viel ab, als die ihr entgegengesetzte wächst (1 §). Wenn nun dasjenige, um welches die entgegengesetzte gewachsen ist, mehr beträgt, als jene: so ist jene völlig vernichtet, und das Resultat der vorgegangenen Veränderung ist der Ueberschuß der entgegengesetzten über jene völlig vernichtete Größe. Hat jemand 100 rthl. jährliche Einnahme, und giebt 150 rthl. aus: so macht er jährlich 50 rthl. Schulden. Hat jemand 36 rthl. Schuld, und sein Vermögen wächst bis auf 90 rthl: so wird dadurch seine Schuld vernichtet, und er hat eigentlich 54 rthl. Vermögen. Ein Schiff, das 100 Meilen vorwärts, und hierauf 120 Meilen zurück gesegelt hat, ist 20 Meilen vom Ort der Ausfahrt zurück, und wenn es Anfangs 27 Meilen zurück, hierauf 46 Meilen auf die entgegengesetzte Art, d. i. vorwärts gesegelt hat, ist jetzt vom Ort der Ausfahrt 19 Meilen vorwärts gekommen.

In der 177 F. ist $-AD$ die Differenz von $+AB$ und $+BD$. Denn wenn $+BD$ rückwärts gelegt wird: so fällt D linker Hand von A. Eben so ist $+A\delta$ die Differenz von $-A\beta$, und $-B\delta$, denn $-B\delta$ nach entgegengesetzter Seite, also rechter Hand von β ausgelegt, giebt $A\delta$ auf der rechten Seite von A.

13 §.

Wenn eine Größe von der ihr entgegengesetzten subtrahirt wird: so bekomt der Rest einerley Zeichen mit derjenigen, wovon man subtrahirt, wie in folgenden Exempeln.

$+70$ rthl.	-27 rthl.
-30 rthl.	$+53$ rthl.
Rest $+100$ rthl.	Rest -80 rthl.

$+97$ Meil.

+ 97 Meil.	− 65 Meil.
− 25 Meil.	+ 13 Meil.
Rest + 122 Meil.	Rest − 78 Meil.

Wer 70 rthl. Vermögen um das Gegentheil von 30 rthl. Schulden verändert, erwirbt noch 30 rthl., und wer 27 rthl. Schulden um das Gegentheil von 53 rthl. Vermögen verändert, macht noch 53 rthl. Schulden mehr. Wer 97 Meilen vorwärts gereiset ist, und noch 25 Meilen nicht rückwärts reiset, komt noch 25 Meilen weiter vorwärts, und wer 65 Meilen rückwärts gereiset und noch 13 Meilen nicht vorwärts gereiset ist, geht noch 13 Meilen weiter zurück.

Die Linie −BE von +AB subtrahirt giebt in der 177 F. +AE, denn man soll von B aus an AB eine Linie BE ansetzen, die nicht rückwärts, also vorwärts liegt. Die Linie +βε von −Aβ subtrahirt, giebt −Aε. Denn an −Aβ soll man von β aus eine Linie legen und zwar nicht gegen die rechte, also gegen die linke Hand.

14 §.

In der allgemeinen Rechenkunst bedienet man sich mit vielem Vortheil der Buchstaben des Alphabeths, um die Größen zu bezeichnen, die bey der Auflösung mathematischer Aufgaben in Betrachtung kommen; so wie es bereits zu verschiedenen mahlen in den vier letzten Abschnitten der Rechenkunst geschehen ist. Dies sind sodann ganz allgemeine Zeichen, wodurch man Zahlen, Linien, und überhaupt jede andre Art von Größen, welche man will, verstehen kan. Gleiche Größen werden mit einerley Buchstaben, ungleiche mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet. Buch-

staben, die unmittelbar bey einander hingeschrieben sind, bedeuten Producte, die aus den Factoren, welche die Buchstaben anzeigen, entstanden sind, und Quotienten werden wie in der gemeinen Rechenkunst angezeigt. Zuweilen ist es bequem, auch durch die Zeichen (×) oder (·) die Multiplication anzudeuten.

Da die Buchstaben hier gewisser massen das sind, was bey der Rechnung mit genannten Zahlen die Nahmen der Größen: so kan man auch hier diejenigen Größen, die durch einerley Buchstaben ausgedruckt sind, als gleichartige, die übrigen, als ungleichartige Größen ansehen.

15 §.

Eine Reihe, die aus positiven, und negativen Größen als Theilen zusammengesetzt ist, zu einer andern Reihe eben solcher Größen zu addiren.

Aufl. Man schreibe die gleichartigen Theile unter einander, und setze die Summe jeder zweener solcher Theile mit dem zugehörigen Zeichen darunter nach den Regeln des 6 und 8 §. Brüche von ungleicher Benennung bringe man vorher auf gleiche Benennung, und beobachte bey ihnen in allen Stücken die Regeln des VI Abschnitts der Rechenkunst. Die ungleichartigen Theile setze man mit ihren zugehörigen Zeichen in der Summe nach einander hin, ohne andre Veränderung.

Exempel.

$$\begin{array}{r} ax - 2bb - 5ce + 6ab - 3f \\ 5ax + 6bb - 7ce \qquad + 2f - g \\ \hline \text{Summe} \quad 6ax + 4bb - 12ce + 6ab - f - g. \end{array}$$

$\frac{ab}{c}$

$$\frac{ab}{c} - 6k + 3\frac{m}{n} - 7g + \frac{r}{s}$$
$$\frac{f}{c} - 9\frac{k}{e} - 7\frac{r}{nh} + \frac{t}{s} - c$$

Sum. $\frac{ab+f}{c} - \frac{6ke+9k}{e} + \frac{3mh-7r}{nh} - 7g + \frac{r+t}{s} - c.$

16 §.

Eine Reihe, die aus positiven und negativen Größen zusammengesetzt ist, von einer andern Reihe eben solcher Größen zu subtrahiren.

Aufl. Man schreibe die zu subtrahirende Reihe unter der andern, wie bey der Addition, und setze die Differenz jeder zweener gleichartigen Theile mit dem gehörigen Zeichen unter denselben nach den Regeln des 10, 11, und 13 §. Mit den Brüchen gehe man so um, wie bey der Addition erinnert worden. Die Theile der obern Reihe, zu denen in der untern keine gleichartige zu gehören, setze man mit ihren Zeichen zur Differenz: die Theile in der untern Reihe aber, zu denen in der obern keine gleichartige vorhanden sind, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen zur Differenz herunter.

Exempel.

$$6yy - 3gxx + hff - c - d.$$
$$5yy - 2gxx - 7hff \quad - 3d.$$

Rest $yy - gxx + 8hff - c + 2d.$

$$\frac{3f}{g} + \frac{7a}{b} - 6x + 7y$$
$$\frac{5k}{mg} - \frac{6a}{b} + 2x - h$$

Rest $\frac{3mf-5k}{mg} + \frac{13a}{b} - 8x + 7y + h.$

17 §.

Ein paar Größen, sie mögen entgegengesetzte, oder nicht entgegengesetzte Größen seyn, in einander multipliciren heist zur Einheit, und zu denen beyden gegebenen Größen die vierte Proportional-Größe suchen. Eine Größe durch eine andre, die ihr entgegengesetzt seyn kan, oder auch nicht entgegengesetzt ist, dividiren heist zum Divisor, der Einheit und dem Dividendo die vierte Proportional-Größe suchen. So allgemeine Erklärungen von der Multiplication und Division sind in der Geometrie (165. 166 §. G.) bereits gebraucht worden, und eben so allgemein müssen diese Wörter auch hier verstanden werden. Bevor aber hieraus die Regeln für die Multiplication und Division allgemein ausgedrückter Größen hergeleitet werden können, ist vor allen Dingen anzumerken nöthig, daß die Begriffe von den Verhältnissen und Proportionen näher bestimt werden müssen, so bald der Unterscheid positiver und negativer Größen in Betrachtung komt.

18 §.

Vergleicht man nemlich sonst zwo Größen A und B mit einander: so will man blos wissen, wie groß die eine gegen die andre sey; in der allgemeinen Rechenkunst

chenkunst aber will man zugleich wissen, ob A und B einander entgegengesetzt sind, oder nicht. Wenn A gegen B eben so groß ist, als C gegen D: so ist das Verhältniß A:B dem Verhältniß C:D gleich, und es sind A:B = C:D vier Proportional-Größen. Dies lehren die ersten Anfangsgründe. Hier aber wird zur Gleichheit zwoer Verhältnisse noch mehr erfodert. Sind A und B einander entgegengesetzt: so müssen auch C und D einander entgegengesetzt seyn. Sind A und B einander nicht entgegengesetzt: so muß auch eben das von C und D gelten. Folgende Proportionen können demnach bestehen.

$$+A:+B=+C:+D$$
$$+A:+B=-C:-D$$
$$+A:-B=+C:-D$$
$$+A:-B=-C:+D.$$

Keinesweges aber $+A:+B=+C:-D$, oder $-A:-B=+C:-D$, wenn gleich für sich betrachtet A gegen B so groß ist, als C gegen D. Es muß überhaupt zwischen den beyden ersten Gliedern einer Proportion eben die Beziehung des Gegensatzes, oder nicht Gegensatzes statt haben, welche zwischen den beyden letztern Gliedern statt hat.

19 §.

Es wird demnach auch selbst der Begriff der Gleichheit (7 §. R.) hier nicht ohne Einschränkung gebraucht werden können. Ein paar Linien, die man in Ansehung ihrer Größe für einander setzen kan, heissen sonst gleich grosse Linien. Dieser Umstand kan auch bey entgegengesetzter Lage der Linien statt haben, und dennoch können hier zwo entgegengesetzte

Größen

Größen nie gleiche Größen heissen, wenn sie gleich für sich betrachtet, ohne auf die Beziehung des Gegensatzes zu sehen, gleich groß sind. Es ist keinesweges $+a=-a$, wenn gleich a einerley Linie, oder sonst einerley andre Größe bedeutet. Hier sind nur diejenigen Linien gleich, die beydes, einerley Größe und einerley Lage haben, und überhaupt sind ein paar Größen nur alsdenn gleich, wenn sie nicht allein als Größen für einander gesetzt werden können; sondern auch überdem einander nicht entgegengesetzt sind. Ohne Zweifel ist $+a=+a$, und $-a=-a$. Wäre nun auch $+a=-a$: so wäre die Proportion richtig $+a:+a=+a:-a$, oder $-a:-a=+a:-a$, welches nicht seyn kan (18 §).

20 §.

Man kan in einem gewissen Verstande sagen, es sey $-a<+a$, und überhaupt, es sey jede negative Größe kleiner, als eine positive, die mit ihr von einerley Art ist. So wäre auch $-2a<+a$, $-3a<+a$ u. s. f. Man kan in eben dem Verstande sagen, es sey $-2a<-a$, $-3a<-2a$ u. s. f. so daß wachsende negative Größen als abnehmende positive betrachtet werden. Ja man kan endlich gar eine negative Größe als eine solche betrachten, die kleiner, als nichts ist. Dies will aber alles nur so viel sagen: eine Größe, die als negativ betrachtet abnimt, wächst in andrer Absicht auf die entgegengesetzte Art. Wer Schulden bezahlt, bessert sein Vermögen. Ein zurückverschlagenes Schiff komt vorwärts, indem die Strecke des Weges, die es zurückgekommen ist, kleiner wird. Je kleiner die negative Größe ist, desto näher ist sie der positiven. Wenn

eine

eine negative Größe völlig verschwindet: so ist nichts weder vom negativen, noch positiven da, und man ist nun dem positiven näher, als vorher, da noch etwas negatives da war. Wer alle seine Schulden bezahlt, und nichts übrig hat, ist besser daran, als vorher, da er noch Schulden hatte. Wer den zurückgegangenen Weg wieder vernichtet hat, ist weiter vorwärts gekommen, als vorher, da der Weg rückwärts noch nicht $= 0$ war.

21 §.

Jedes Product entgegengesetzter Factoren ist negativ, und jedes Product nicht entgegengesetzter Größen ist positiv, vorausgesetzt, daß die Einheit allemahl positiv genommen werde.

Beweis. Denn es ist

$$+1 : +a = -b : +a \times -b$$
$$+1 : -a = +b : -a \times +b$$
$$+1 : +a = +b : +a \times +b$$
$$+1 : -a = -b : -a \times -b$$

Also muß $+a \times -b$, und $-a \times +b = -ab$, aber $+a \times +b$ und $-a \times -b = +ab$ seyn (18 §).

22 §.

Die Geometrie erläutert diesen allgemeinen Satz ungemein. Wenn nemlich a und b ein paar grade Linien sind: so ist ab zu einer Linie, die man für die Einheit nimt, und zu den beyden gegebenen a und b die vierte Proportionallinie. Man suche diese vierte Proportionallinie nach dem 208 § der Geom.: so wird in der 178 F. $AE = \frac{AC \times AD}{AB} = ab$, dafern $AB = 1$, $AC = a$, $AD = b$ genommen ist. Man 178 F.

ver-

verlängere die Schenkel des Winkels CAE durch A nach γ und ε: so sind die auf $A\gamma$ abgeschnittenen Stücke gegen AC, und die auf $A\varepsilon$ abgeschnittenen Stücke gegen AE negativ. Man mache nun $A\gamma = AC$: so ist $A\gamma = -a$. Zieht man hierauf mit BD durch γ die Parallele $\gamma\varepsilon$: so schneidet diese AE auf der negativen Seite, in ε, und man hat

$$AB : A\gamma = AD : A\varepsilon$$

d. i. $+1 : -a = +b : -ab$.

Läst man AC auf der positiven Seite, und nimt $A\delta = AD$; so wird $A\delta = -b$. Jetzt schneidet die durch C mit $B\delta$ parallel gezogene Linie $C\varepsilon$ wieder in eben den Punct ε der Linie AD auf der negativen Seite, und man hat

$$AB : AC = A\delta : A\varepsilon.$$

d. i. $+1 : +a = -b : -ab$.

Man nehme endlich $A\gamma = AC$, $A\delta = AD$ so daß $A\gamma = -a$, $A\delta = -b$ wird, und ziehe durch γ mit $B\delta$ eine Parallele: so fällt der Durchschnittspunct in eben dem Punct E, wie in dem ersten Fall, und man hat

$$AB : A\gamma = A\delta : AE$$

oder $+1 : -a = -b : +ab$

so wie in dem ersten Fall.

$$AB : AC = AD : AE$$

oder $+1 : +a = +b : +ab$.

23 §.

Eine Größe, die aus mehrern positiven und negativen Theilen zusammengesetzt ist, mit einer andern ebenfalls zusammengesetzten Größe zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach einander alle Theile des Multiplicandi mit einem jeden Theil des Multiplicators

plicators nach dem 21 §, und bringe die einzelnen Producte alle in eine Summe nach den Regeln des 15 §: so hat man das verlangte Product (192 § G.) Kommen unter diesen Theilen Brüche vor: so multiplicire man sie, wie im 116 § der R. gezeigt worden (198 § G.)

Da die Ordnung der Factoren in jedem Product willkührlich ist: so kan man die Buchstaben, welche die Factoren ausdrücken, in der Ordnung schreiben, wie sie im Alphabeth nach einander folgen. Auf solche Art läst es sich desto geschwinder übersehen, wie weit die Factoren zweyer Producte einerley, oder verschieden sind.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+bb \\ \hline aa+2ab+bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline -ab+bb \\ aa-ab \\ \hline aa-2ab+bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa--bb. \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b-c \\ b-c \\ \hline -ac-bc+cc \\ ab+bb-bc \\ \hline ab-ac+bb-2bc+cc. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5a+3b-9c+4d \\ 7b+2c-6d \\ \hline -30ad-18bd+54cd-24dd \\ +10ac+6bc-18cc+8cd. \\ 35ab+21bb-63bc+28bd. \\ \hline 35ab+10ac-30ad+10bd+62cd-24dd. \\ +21bb-57bc-18cc. \end{array}$$

24 §.

Entgegengesetzte Größen in einander dividirt geben einen negativen, nicht entgegengesetzte Größen aber einen positiven Quotienten, vorausgesetzt, daß die Einheit positiv sey.

Beweis. Denn es ist

$$+a:+1=-b:\frac{-b}{+a}$$

$$-a:+1=+b:\frac{+b}{-a}$$

$$+a:+1=+b:\frac{+b}{+a}$$

$$-a:+1=-b:\frac{-b}{-a}$$

Also wird $\frac{-b}{+a}$ und $\frac{+b}{-a}=-\frac{b}{a}$ aber $\frac{+b}{+a}$ und $\frac{-b}{-a}=+\frac{b}{a}$ (18 §). Wenn in der 178 F. AC $=a$, AB $=1$, AE $=b$ gesetzt wird: so hat man AD $=\frac{b}{a}$. Nimt man nun Aγ statt AC oder Aε statt AE: so giebt die Verzeichnung Aδ statt AD. Nimt man beydes zugleich Aγ statt AC, und Aε statt AE: so giebt die Verzeichnung AD eben so wie im ersten Fall.

25 §.

Eine zusammengesetzte Größe durch eine einfache zu dividiren.

Aufl. Man dividire nach einander alle Theile des Dividendi durch den gegebenen Divisor: so erhält

hält man nach und nach die Theile, welche zusammen den Quotienten ausmachen (192 §. G.) Bey der Division der Theile selbst verfahre man so:

Dafern der Divisor selbst ein Factor des zu dividirenden Theils ist: so streiche man ihn weg, wiedrigenfalls drücke man den Quotienten durch einen Bruch aus, dessen Zehler der dividirte Theil, und dessen Nenner der Divisor ist, die Factoren aber, welche Zehler und Nenner dieses Bruchs etwa gemeinschaftlich haben, lasse man weg. Uebrigens setze man allemahl das Zeichen des Quotienten nach dem 24 § voran.

Exempel.

$$\frac{abc+aab-aac}{bc} = a + \frac{aa}{c} - \frac{aa}{b}$$

$$\frac{abcd-aabc-aacd+aabb}{bbc} = \frac{ad}{b} - \frac{aa}{b} - \frac{aad}{bb} + \frac{aa}{c}$$

$$\frac{8ffgg-12fggh-20gghh+ffhh}{-4ffhh} = -\frac{2gg}{hh} + \frac{3gg}{fh} \frac{5gg}{ff} - \tfrac{1}{4}.$$

26 §.

Eine zusammengesetzte Größe durch eine andre zusammengesetzte zu dividiren.

Aufl. Man ordne die Theile des Dividendi so, daß alle diejenigen zuerst nach einander folgen, die

mit dem ersten Theil des Divisors gemeinschaftliche Factoren haben.

Man schreibe den Divisor unter dem Dividendo, und dividire nach dem 24 § das erste Glied des Dividendi durch des Divisors ersten Theil: so hat man den ersten Theil des Quotienten. Diesen multiplicire man in den ganzen Divisor, und subtrahire das Product vom Dividendo nach den Regeln des 16 §.

Den Rest dividire man nochmahl auf eben die Art, wie vorhin: so erhält man des Quotienten zweeten Theil. Dies Verfahren setze man fort, bis entweder einmahl alles aufgeht, oder man setze zu den auf die Art gefundenen Theilen des Quotienten einen Bruch, dessen Zehler der letzte Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. Dies Verfahren ist demjenigen in allen Stücken ähnlich, welches im 68 § der Rechenkunst für die Zahlen vorgeschrieben worden, und man siehet leicht, daß die dort gebrauchten Gründe dieses Verfahrens, hier ebenfalls statt haben.

Exempel.

$aa - 2ab + bb \mid a - b$	$aa - bb \mid a - b$
$a - b$	$a + b$
$aa - ab$	$aa + ab$
$-ab + bb$	$-ab - bb$
$a - b$	$a + b$
$-ab + bb$	$ab - bb$
0	0

$35ab+21bb-57bc+10bd+10ac \mid 5a+3b-9c+4d.$
$-30ad-18cc+62cd-24dd$

div.) $7b+2c-6d$ $6d$

$35ab+10ac-30ad$

$+21bb-57bc+10bd-18cc+62cd-24dd$

$7b+2c-6d$

$+21bb+6bc-18bd$

$-63bc+28bd-18cc+62cd-24dd$

$7b+2c-6d$

$-63bc-18cc+54cd$

$+28bd+8cd-24dd$

$7b+2c-6d$

$+28bd+8cd-24dd$

0

Der II. Abschnitt.

Von den Ausdrücken des Unendlichen.

27 §.

Es läst sich keine Zahl angeben, von der man sagen könnte, daß sie unter allen möglichen Zahlen Zahlen die gröste sey. Denn man mag sich eine Zahl so groß vorstellen, als man will; so kan man sie noch immer größer machen. Man kan dazu eine andre addiren, man kan sie doppelt, dreyfach, vierfach, u. s. f. nehmen. Eine wachsende arithmetische Progreßion hat also so wenig, als eine wachsende geometrische Progreßion ein letztes Glied, nach welchem nicht mehrere folgen könnten. Man kan zu jedem Gliede der arithmetischen die Differenz der

Glieder aufs neue addiren, und jedes Glied der geometrischen Progreßion, mit dem Exponenten wieder multipliciren.

Etwas ähnliches gilt von einer jeden Größe, dergleichen diejenigen sind, die man in der Mathematik
177 zu betrachten pflegt. Wenn eine grade Linie AB in
F. A anfängt, und durch B fortgezogen wird: so kan ihr Endpunct B so weit, als man will, fortrücken. Man kan B von A nie so weit fortführen, daß B nicht noch weiter fortrücken könnte.

28 §.

Was seine bestimten Grenzen hat, nennt man endlich, und in sofern etwas keine Grenzen hat, nennt man es unendlich. Eine Zahl, die keine Grenzen hätte, über welche sie noch wachsen könnte, würde man also eine unendliche oder unendlich grosse Zahl nennen. Eine Linie, die von A durch B ohne Ende fortgezogen wäre, und keinen Endpunct hätte, würde eine unendlich grosse Linie heissen. So würde das letzte Glied einer wachsenden arithmetischen, oder geometrischen Progreßion, nach welchem nicht mehrere folgen könnten, unendlich groß seyn.

Nun läst sich freylich keine unendlich grosse Zahl angeben, es läst sich keine unendlich grosse Linie würklich darstellen. Inzwischen bleibt es gewiß, daß man sich im Verstande die Vorstellung von einer Grenze machen könne, der sich eine ohne Aufhören wachsende Zahl, oder Linie, oder sonstige Größe beständig mehr nähert, ob sie gleich selbige eigentlich nie erreichet; und diese Grenze, womit eine Größe zu wachsen aufhören müste, wenn sie nicht

größer werden könnte, ist es, was man in der Mathematik eine unendlich grosse Größe nennet. Man braucht folgendes Zeichen (∞) anzudeuten, daß eine Größe unendlich werde.

29 §.

Wenn der Zehler eines Bruchs endlich ist, sein Nenner aber unendlich groß wird: so wird der Bruch selbst = o.

Beweis. Man nehme an, der Zehler b eines Bruchs $\frac{b}{x}$ ändre sich nicht, aber sein Nenner x wachse: so wird der Bruch selbst kleiner. Wird x doppelt so groß, als vorher: so bleibt $\frac{b}{x}$ nur halb so groß; wenn x dreymahl größer wird: so wird $\frac{b}{x}$ dreymahl kleiner, u. s. f. (194§ G.) Wenn also x ohne Aufhören wächst: so muß $\frac{b}{x}$ ohne Aufhören abnehmen, und wenn man sich die Vorstellung macht, der Nenner x erreiche die Grenze, über die er nicht wachsen kan: so muß der Bruch $\frac{b}{x}$ eine Grenze erreichen, unter welche er nicht abnehmen kan, das heist, es muß $\frac{b}{\infty} = o$ seyn. Denn wäre $\frac{b}{\infty}$ noch nicht $= o$: so könnte $\frac{b}{\infty}$ noch kleiner werden. Dies könnte nicht seyn, wofern ∞ nicht noch größer würde, da b sich nicht ändert.

Aber ∞ kan nicht mehr größer, also $\frac{b}{\infty}$ nicht mehr kleiner werden.

30 §.

Es ist also die o gleichfalls als eine Grenze anzusehen, der sich eine beständig abnehmende Größe ohne Aufhören nähert, sie aber nie erreicht, so lange sich noch angeben läst, wie klein die Größe sey. Man kan die Glieder einer abnehmenden geometrischen Progreßion gleichfalls ohne Ende fortsetzen, man mag auf ein Glied gekommen seyn, das vom ersten, so weit man will, entfernt ist: so kan man noch allemahl ein folgendes machen, das kleiner, als das vorige ist. Inzwischen komt man doch auf solche Art der o immer näher, und die o ist die Grenze, der sich die Glieder einer abnehmenden geometrischen Progreßion immer mehr nähern, je weiter man sie fortsetzt. Stellet man sich demnach ein Glied vor, das unter allen das letzte ist: so ist dies mit der o einerley. Wenn man sich die o als eine solche Grenze vorstellt: so nennt man sie eine unendlich kleine Größe, und dies um der Aehnlichkeit willen mit dem, was man unendlich groß nennet. Sie ist die Grenze, welcher eine ohne Aufhören abnehmende Größe sich immer mehr nähert, und die sie alsdenn erst erreicht, wenn sie aufhört eine Größe zu seyn. Demnach ist der Bruch $\frac{b}{\infty}$ unendlich klein, mit andern Worten: er ist ein verschwindender Bruch.

31 §.

Man setze wie im 24 § in der 178 F. AB = 1, AC = x,

$AC = x$, $AE = b$: so hat man $AD \frac{b}{x}$. Man lasse AC wachsen, oder den Punct C weiter von A weg nach c rücken, ziehe cE, und, wie erfordert wird, Bd mit cE parallel: so ist nun $Ad = \frac{b}{x}$, wenn Ac statt AC durch x verstanden wird. Man siehet leicht, daß der Punct d immer weiter gegen A rücken werde, je weiter man c von A fortrückt. Soll nun c über alle Grenzen von A wegrücken, d. i., soll Ac unendlich groß werden: so kan Ec mit Ac gar nicht weiter zusammenstossen; also muß in diesem Fall Ec mit Ac parallel seyn (80 §. G.). Da nun Bd mit Ec parallel gezogen werden muß: so fällt Bd in BA, und d in A, d. i. es wird $\frac{b}{x} = Ad = 0$.

32 §.

Ein Bruch ist unendlich groß, wenn sein Zehler endlich, sein Nenner aber unendlich klein, oder = 0 ist.

Beweis. Weil der Bruch $\frac{b}{x}$ wächst, wenn sein Nenner abnimt, vorausgesetzt, daß der Zehler sich nicht ändre: so wird er über alle Grenzen wachsen, wenn sein Nenner unter alle Grenzen abnimt. Inzwischen behält der Bruch noch allemahl eine bestimte Größe, so lange sein Nenner noch eine bestimte Größe behält, der letzte mag so klein werden, als er wolle. Wenn demnach der Nenner x die Grenze $= 0$ erreicht, unter welche er nicht abnehmen kan:

so muß der Bruch $\frac{b}{x}$ die Grenze $= \infty$ erreichen, über welche er nicht wachsen kan. Könnte $\frac{b}{0}$ noch wachsen: so müste 0 noch abnehmen können, welches nicht angehet.

33 §.

178 F. Es sey in der 178 F. wie im 31 § AB = 1, AC $= x$, AE $= b$, so daß AD $= \frac{b}{x}$. Wenn nun AC kleiner wird so, daß der Punct C gegen A zu nach C rückt, und man ziehet, wie erfordert wird, die grade Linie BD mit EC parallel: so fällt D von A weiter entfernt, als D, so daß AD aus AD wird, und AD wird immer größer, je näher C dem Punct A rückt. Wenn C in A fällt, also AC $= x = 0$ ist: so fällt CE mit AE zusammen, und BD muß mit AE parallel gezogen werden. Demnach giebt es in AE gar keinen Durchschnittspunct D mehr, und AD hat gar keinen Endpunct D mehr, das heist, $\frac{b}{0}$ ist unendlich groß.

34 §.

Bey der Auflösung mathematischer Aufgaben kommen oft solche Größen in Betrachtung, denen man keine bestimte Werthe beylegt. Es ist z. E.
178 F. oft von einer Linie, wie Ac in der 178 F. die Rede, wovon die Größe einer, oder mehrerer andrer Linien, wie Ad abhängt, und man sucht eigentlich nicht, wie groß Ac, oder Ad sey; sondern nur das Gesetz, nach welchem sich Ad verändert, wenn Ac wächst oder abnimt. Größen von dieser Art, denen man keine

festgesetzte Werthe beylegt, und die man als solche betrachtet, die nach Gefallen wachsen, oder abnehmen können, heissen unbestimte, oder veränderliche Größen. Solche Größen aber, die ein für allemahl bestimte Werthe haben, heissen beständige Größen.

35 §.

Wenn das eine Glied eines geometrischen Verhältnisses veränderlich, das andre aber eine beständige Größe ist: so ist das Verhältniß selbst ein veränderliches, oder unbestimtes Verhältniß. Sind beyde Glieder des Verhältnisses veränderlich: so ändert sich das Verhältniß nicht allemahl, wenn sich beyde Glieder zugleich ändern. Es sey x eine veränderliche, a und b aber beständige Größen: so werden ax und bx ebenfalls veränderliche Größen, aber dennoch wird das Verhältniß $bx : ax$ ein beständiges Verhältniß seyn. Denn es mag sich x ändern, wie man will: so ändert sich dennoch $\frac{bx}{ax}$ nicht, und bleibt allemahl $= \frac{b}{a}$. Demnach muß auch $\frac{bx}{ax} = \frac{b}{a}$ seyn, wenn gleich $x = 0$, oder $x = \infty$ wird, oder es muß auch $\frac{b.0}{a.0} = \frac{b.\infty}{a.\infty} = \frac{b}{a}$ seyn. Also kan das Verhältniß zwoer verschwindender, oder auch zwoer unendlicher Größen, ein endliches Verhältniß seyn.

36 §.

Es fällt nemlich für sich in die Augen, daß die Producte $b.0$, $a.0$, verschwinden, wenn b und a end-

endlich sind: es erhellet überdem leicht, daß die Producte $b.\infty$, und $a.\infty$, unendlich groß werden, weil der eine Factor unendlich groß wird. Denn nach dem allgemeinen Begriff der Multiplication ist $1 : a = \infty : a.\infty$. Da nun in dieser Proportion die ersten beyden Glieder endlich sind, das dritte aber unendlich groß ist: so muß das vierte $a.\infty$ auch unendlich groß seyn, weil eine endliche Größe zu einer unendlichen sich nicht so verhalten kan, wie eine endliche zu einer andern endlichen Größe. Demnach scheinet es, daß aus dem letzten Satz des 35 § folge, es könne eine verschwindende Größe $b.0$, die andre $a.0$, es könne auch eine unendliche Größe $b.\infty$ die andre $a.\infty$ übertreffen, ja eine die andre so viel mahl enthalten, als man will. Setzte man nemlich $a = 1$, und $b = 2$: so wäre eine doppelt so groß als die andre; wenn $b = 3$: so wäre eine dreymahl so groß, als die andre, u. s. f. Aber wie kan eine 0 größer seyn, als die andre 0, wie kan eine unendliche Größe die andre noch übertreffen? Dies streitet ja mit einander.

37 §.

In der That würde es auch ungereimt seyn, wenn man etwas dergleichen behaupten, und sagen wollte, eine 0 könne größer, oder kleiner, als die andre, ein unendliches größer oder kleiner, als das andre seyn. Was 0 ist, kan nicht mehr kleiner werden, und was unendlich ist, kan nicht mehr größer werden, in so fern es unendlich ist. Demnach können Ausdrücke von dieser Art $\frac{2.0}{1.0} = \frac{2\infty}{1\infty} = 2$ diesen Sinn nicht haben, es sey eine 0 doppelt so groß, als die andre oder ein unendliches doppelt so groß, als das andre;

andre; die Sache ist vielmehr diese. Es bleibt bx zu ax allemahl in dem Verhältnisse $b:a$, es mag x so weit man will, abnehmen; oder, so weit man will, wachsen. Wenn x, also auch bx und ax schon würklich verschwunden sind: so hört alle fernere Vergleichung auf, eben so, wie die Vergleichung aufhört, wenn x, also auch bx, und ax schon unendlich groß sind. Aber bx und ax als verschwindende, oder unendlich werdende Größen betrachtet, stehen in dem Verhältniß $b:a$. Da sie in jedem Zustande, so lange sie endlich sind, sich wie $b:a$ verhalten: so müssen sie auch beym Abnehmen sowol, als beym Wachsen, in ihrem letzten endlichen Zustande noch in dem Verhältnisse $b:a$ stehen.

38 §.

Man setze in der 178 F. $AB=1$, $AC=a$, $AD=x$: so ist $AE=ax$. Ueberdem sey $AF=b$, und FG mit BD parallel: so $AG=bx$. Nun mag der Punct D so nahe an A rücken, als man will, es bleibt das Verhältniß AG:AE, oder $bx:ax$ allemahl $=AF:AC$, oder $=b:a$. Wenn D in A fällt: so fallen auch E und G in A zusammen, und AE, AG verschwinden mit AD zugleich. Indem aber die Puncte E und G mit D gegen A rücken: bekommen AG und AE alle mögliche endliche Werthe, die zwischen AG und o, imgleichen zwischen AE und o fallen, und in dem Verhältniß AF:AC, stehen. Unter diesen Werthen muß es ein paar geben, welche von allen die letzten sind, und auch diese noch stehen in dem Verhältniß AF:AC. Rückt D von A über alle Grenzen weg: so rücken auch G und E von A über alle Grenzen weg. Alle endliche Werthe, die

178 F.

AG

AG und AE bekommen, stehen in dem Verhältniß AF:AC, und unter diesen Werthen müssen auch die letzten in eben dem Verhältnisse seyn.

39 §.

Ausdrücke von dieser Art $\frac{0}{0}$, oder $\frac{\infty}{\infty}$ haben also, überhaupt zu sagen, keine bestimte Werthe, dafern man jede verschwindende Größe mit 0, und jede unendliche Größe mit ∞ bezeichnen will: es muß vielmehr in jedem besondern Fall aus andern Umständen geschlossen werden, was für eine Größe durch einen solchen Bruch ausgedrückt werde. In
178 F. der 178 F. kan man die Puncte C und F auf der graden Linie AB anfangs, wo man will, nehmen, so daß AF:AC jedes Verhältniß ausdrücken kan, dem das Verhältniß AG:AE allemahl gleich ist, wenn auch AG und AE zugleich verschwinden, oder unendlich groß werden. Deswegen ist es am besten, wenn man nur den Quotienten $\frac{1}{\infty} = 0$, und den Quotienten $\frac{1}{0} = \infty$ sezt, andre ähnliche Quotienten aber wie $\frac{b}{\infty}$ durch $b.0$, und $\frac{b}{0}$ durch $b.\infty$ ausdrückt. Auf solche Art fällt bey Vergleichung dieser verschwindenden oder unendlichen Größen, sogleich ihr Verhältniß gegen einander in die Augen.

40 §.

Wenn ein Factor verschwindet, und der andre Factor zugleich unendlich wird: so kan das Product von endlicher Größe seyn.

Beweis.

Beweis. Es ist $0\infty = 0 : \frac{1}{\infty} = \frac{0}{0}$, oder auch $0.\infty = \infty : \frac{1}{0} = \frac{\infty}{\infty}$. Was also von den Brüchen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ im 35-39 § erwiesen ist, muß auch von dem Product $0.\infty$ gelten. Demnach kan dies Product endlich seyn, und in jedem besondern Fall muß der eigentliche Werth desselben aus den übrigen Umständen der Rechnung geschlossen werden.

41 §.

Wenn eine Größe, z. E. eine Linie AD als eine veränderliche Größe betrachtet wird, und man setzt, sie habe sich um ein gewisses Stück, z. E. D*d* geändert: so nimt man in der allgemeinen Rechenkunst als eine Voraussetzung an, daß diese Veränderung nicht plötzlich geschehe; sondern AD vielmehr während dieser Veränderung durch alle Werthe durchgehe, die zwischen AD und A*d* fallen. Hieraus folgt, wenn AD positiv gewesen ist, aber nach und nach kleiner und hierauf negativ geworden ist, daß während dieser Veränderung einmahl müsse $AD = 0$ gewesen seyn. Der Punct D kan beym Zurückgehen nicht nach *d* kommen, wofern er nicht durch A gegangen ist, und indem D in A fällt, ist $AD = 0$. So kan auch aus dem negativen Werth A*d*, wenn derselbe nach und nach abnimt, der positive nicht werden, wofern nicht einmahl $-Ad = 0$ gewesen ist. Demnach ist die 0 so zu reden eine Grenze zwischen dem positiven, und negativen Werthe einer verän- 178 F.

der-

derlichen Größe, und in dieser Absicht kan man der o weder das Zeichen +, noch das Zeichen — voransetzen. Die o ist an sich weder positiv noch negativ. Nachdem man inzwischen die o als den letzten Zustand einer positiven, oder negativen abnehmenden Größe betrachtet, kan man in jenem Falle $+o$, in diesem $-o$, schreiben.

42 §.

Hieraus folgt, daß eine unendliche Größe, in so fern sie als der Quotient einer endlichen Größe durch o dividirt betrachtet wird, ebenfalls kein bestimtes Zeichen +, oder — habe, weil $\frac{1}{+o} = +\infty$, und $\frac{1}{-o} = -\infty$ wird. So wie nun eine veränderliche Größe, indem sie verschwindet, in einen unbestimten Zustand komt; eben so kan eine veränderliche Größe, indem sie unendlich wird, in einen unbestimten Zustand kommen, der ebenfalls gleichsam eine Grenze zwischen den positiven und negativen Werthen ist.

Läst man im Quotienten $\frac{1}{+x}$ den positiven Divisor abnehmen, o werden, und dann wieder negativ wachsen: so wächst der positive Quotient $\frac{1}{+x}$, wird ∞ für $x=o$; bekomt darauf den negativen Werth $\frac{1}{-x}$ und nimt ab, so wie $-x$ wächst. Wenn in der 178 F. AC abnimt, und C

durch

durch C gegen A rückt: so wird der Winkel ACE = ABD größer, und die Linie BD drehet sich um B von AB weg, daher denn der Durchschnittspunct D von A wegrückt. Indem C in A fällt, wird BD mit AE parallel, und es giebt gar keinen Durchschnittspunct D mehr, weder auf der einen, noch auf der andern Seite von A. Will man sich nun einen von A unendlich weit entfernten Durchschnittspunct vorstellen: so kan man ihn so gut auf der einen, als auf der andern Seite von A annehmen, daher nun $AD = \pm\infty$ wird. Rückt C durch A auf der entgegengesetzten Seite nach γ: so stöst BD mit AD auf der entgegengesetzten Seite in δ zusammen, und $A\delta$ nimt *ab*, wenn $A\gamma$ wächst. Eine veränderliche Größe kan also auch aus dem positiven Zustande in den negativen durch die Grenze ∞ übergehen, indem sie nemlich bis zu ∞ wächst, und hierauf negativ abnimt.

43 §.

Wenn man die negativen Größen wie im 20 § als solche betrachten will, die kleiner, als nichts sind: so kan man sie zuweilen auf ähnliche Art als solche ansehen, die größer, als unendlich sind. Die allgemeine Regel ist: Ein Quotient wächst, wenn der Divisor bey eben dem Dividendo abnimt. Wenn also $-x < 0$ ist: so folgt daraus, es sey $\frac{1}{-x} > \frac{1}{0}$.

Aber das sind alles uneigentliche Redensarten, die nur dazu dienen, eine Rechnung über die Gesetze, nach welchen eine veränderliche Größe von der andern abhängt, desto kürzer zu übersehen.

Der III. Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln.

44 §.

Wenn ein Product aus lauter gleichen Factoren bestehet: so heist es eine Potenz oder Dignität eines jeden dieser Factoren; dergleichen wäre *aaa*, *bbbb* u. s. f. Jeder von den gleichen Factoren, deren Product in einander die Potenz ausmacht, heist die Wurzel dieser Dignität.

45 §.

Jede Dignität hat den Nahmen von der Anzahl der gleichen Factoren, die sie ausmachen. So ist *aa* die zwote, *aaa* die dritte, *aaaa* die vierte Dignität von *a* u. s. f. Die erste Dignität von *a* ist *a* selbst. Die zwote Dignität ist mit der Quadratzahl, und die dritte Dignität mit der Cubikzahl (180 §R.) einerley. Man kan demnach die im 181 § der Rechenkunst beschriebene Bezeichnung der Quadrate und Cubikzahlen auf ähnliche Art bey allen Potenzen brauchen. Oberwärts zur rechten der Wurzel setzt man eine kleine Ziffer, welche die Anzahl von dergleichen Wurzeln ausdrückt, so durch die Multiplication in einander, die Potenz ausmachen. Diese Ziffer heist der Index oder Exponent der Dignität. Demnach ist a^5 so viel, als *aaaaa*, b^7 so viel, als *bbbbbbb* u. s. f.

46 §.

Man behält auch hier das im 182 §. R. bereits angeführte Zeichen $\sqrt{\ }$ für die Wurzeln aller Poten-

zen

zen bey, und schreibt darüber eine kleine Ziffer, welche anzeigt, wieviel solcher gleichen Wurzeln die unter dem Zeichen gesetzte Größe durch die Multiplication in einander, ausmachen. Diese Ziffer heist der **Wurzel-Exponent**. Auch diese Wurzeln bekommen ihren Nahmen von dem Wurzel-Exponenten. So heist eine Wurzel der zwoten, dritten, vierten, fünften, sechsten **Dignität**, oder auch **Ordnung**, diejenige, deren Wurzel-Exponent 2, 3, 4, 5, 6 ist, u. s. f. Die Wurzel der zwoten Dignität ist mit der Quadrat-Wurzel, und die Wurzel der dritten Dignität, mit der Cubikwurzel einerley. Bey der Quadratwurzel pflegt man den Exponenten Kürze halber wegzulassen. Vermöge der festgesetzten Bezeichnungsart ist also z. E. $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$ u. s. f., und umgekehrt $3=\sqrt{9}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[5]{243}$ u. s. f. Ueberhaupt ist $\sqrt[n]{a^n}=a$, und $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

47 §.

Potenzen und Wurzeln, die gleiche Exponenten haben, kan man füglich **gleichnahmichte Potenzen und Wurzeln** nennen.

Die Sätze des 183 § der Rechenkunst gelten mit gehöriger Veränderung von allen gleichnahmichten Potenzen und Wurzeln. Denn die daselbst gebrauchten Gründe sind so allgemein, daß sie sich allemahl anwenden lassen, wenn stat der Quadrat- oder Cubikzahlen überhaupt gleichnahmichte Potenzen verstanden werden.

Wenn $a=b$: so ist überhaupt $a^n=b^n$, und wenn $a>b$: so ist $a^n>b^n$. Wenn also $a=b$: so ist auch $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$, und wenn $a > b$: so ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Die Buchstaben a und b können in diesen Ausdrücken jede Größe, welche man will, der Buchstab n aber nur eine ganze Zahl bedeuten.

48 §.

Die Sätze des 184 und 185 § der Rechenkunst gelten ebenfalls mit gehöriger Veränderung von allen Potenzen und Wurzeln, und man übersiehet diese Allgemeinheit sehr leicht, wenn man die dorten gebrauchten Gründe erwegen, und mit dem 198, 199, und 200 § der Geometrie vergleichen will.

Es ist nemlich überhaupt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Jede Potenz einer ganzen Zahl, ist eine ganze Zahl, und größer, als die Wurzel. Jede Potenz eines uneigentlichen Bruchs ist größer, und jede Potenz eines eigentlichen Bruchs kleiner, als die Wurzel.

Wenn also vier Größen proportional sind: so sind auch ihre gleichnahmichten Potenzen und Wurzeln proportional. Ist $a:b = c:d$: so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, also $\frac{b^n}{a^n} = \frac{d^n}{c^n}$ und $\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{d}}{\sqrt[n]{c}}$, oder $a^n : b^n = c^n : d^n$, und $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ (170 § G.)

Auch

Auch die Sätze des 186 §. R. gelten aus eben der Ursache von allen Potenzen und Wurzeln. Ist $N = abc$: so ist N = ein Product, welches jeden der Factoren a, b, c, einmahl enthält. Demnach ist $N^n = a^n b^n c^n$. Man sieht ohne Umstände leicht, daß dies allemahl gelte, es mögen der Factoren so viel seyn, als man will. Demnach ist umgekehrt

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}, \text{ u. s. f.}$$

49 §.

Wenn die Wurzel ein uneigentlicher Bruch ist, der sich auf keine ganze Zahl bringen läst: so ist jede Potenz derselben ein Bruch von eben der Art.

Beweis. Dieser Satz ist im 188 § der Rech. für die zwote und dritte Potenz erwiesen, und der daselbst gebrauchte Beweis läst sich auf jede andre Potenz leicht anwenden.

Ist demnach die Wurzel einer gewissen Ordnung aus einer ganzen Zahl keine ganze Zahl: so ist sie auch kein Bruch. Wurzeln von dieser Art sind also insgesamt Irrationalzahlen, und man kan überhaupt dergleichen Potenzen, deren Wurzeln irrational sind, **unvollkomne Potenzen** nennen.

50 §.

Potenzen, die gleiche Wurzeln und Exponenten haben, sind beym addiren und subtrahiren als gleichartige Größen anzusehen. Wenn demnach zusammengesetzte Ausdrücke vorkommen, die dergleichen Potenzen enthalten: so addirt man sie eben so zusammen, oder subtrahirt einen von dem andern, wie im 15 und 16 § gewiesen worden.

Exempel.

$$3x^7 - 12x^6 + 4x^3 - 8x - 10$$
$$2x^7 - 13x^6 - 9x^3 + 8$$

Summe. $5x^7 - 25x^6 - 5x^3 - 8x - 2.$

*** *** ***

$$16y^9 - 24y^8 + 13y^5 + 26y^4 - 2$$
$$12y^9 - 16y^8 - 2y^5 - 3y^3 + 7$$

Rest $4y^9 - 8y^8 + 15y^5 + 26y^4 + 3y^3 - 9.$

Bey Ausdrücken von dieser Art beobachtet man gewöhnlich die Regel, daß man sie nach den Potenzen ordnet, das heist: man läst die Glieder so nach einander folgen, wie die Exponenten der Potenzen nach einander entweder abnehmen, oder auch umgekehrt wachsen. So sind die Ausdrücke in dem ersten Exempel nach den Potenzen von x, im zweyten, nach den Potenzen von y geordnet.

51 §.

Die Factoren, welche in die Potenzen multiplicirt sind, heissen in Ausdrücken von dieser Art, die Coefficienten der Glieder. In den vorigen Exempeln waren diese Confficienten durch Zahlen ausgedruckt. Sie können aber auch allgemein durch Buchstaben ausgedrückt seyn, und in diesen Fällen hat die Addition und Subtraction solcher Ausdrücke eben so wenig Schwierigkeit. Der ganze Unterschied bestehet darin, daß man hier die Summen und Differenzen der Coefficienten durch die zwischen ihnen gesetzten Zeichen + und − gehörig anzeigt, die man, wenn es Zahlen sind, selbst hinsetzen kan. Man berechnet also auch leicht folgende Exempel

$ax^5+bx^4-cx^3-cx^2-fx+g$
$mx^5-nx^4-px^3-qx^2+rx+s$

S. $(a+m)x^5+(b-n)x^4-(c+p)x^3-(e+q)x^2+(r-f)x+g+s.$

$ax^m-bx^n-cx^r+ex^s-k$
$fx^m-gx^n-hx^r-px^s-q$

Rest $(a-f)x^m+(g-b)x^n+(h-c)x^r+(e+p)x^s+q-k$

52 §.

Wurzeln aus gleichen Potenzen mit gleichen Wurzel-Exponenten sind beym addiren und subtrahiren gleichfalls als gleichartige Größen anzusehen, und dieserwegen addirt und subtrahirt man zusammengesetzte Ausdrücke, die solche Wurzeln als Theile enthalten, ebenfalls nach den Regeln des 15 und 16 §.

Exempel.

$3\sqrt[5]{a^2}-7\sqrt[3]{b^4}+9\sqrt[2]{c^7}-4\sqrt{e^9}$
$2\sqrt[5]{a^2}+4\sqrt[3]{b^4}+7\sqrt[2]{c^7}-3\sqrt{e^9}$

S. $5\sqrt[5]{a^2}-3\sqrt[3]{b^4}+16\sqrt[2]{c^7}-7\sqrt{e^9}.$

* * * * * * * *

$5\sqrt[7]{a^2}-3\sqrt[8]{b^3}-2\sqrt[3]{c^4}+9\sqrt[7]{e^{12}}$
$2\sqrt[7]{a^2}-4\sqrt[8]{b^3}+3\sqrt[3]{c^4}-2\sqrt[7]{e^{12}}$

Rest $3\sqrt[7]{a^2}+\sqrt[8]{b^3}-5\sqrt[3]{c^4}+11\sqrt[7]{e^{12}}.$

Oft sind die Wurzel-Exponenten zwar gleich, aber die Größen unter dem Wurzel-Zeichen ungleich. Besteht nun die Größe unter dem Wurzel-Zeichen

aus zweenen Factoren, und aus dem einen läst sich die Wurzel würklich ausziehen: so schreibt man diese vor dem Wurzel-Zeichen, und läst den andern Factor unter dem Wurzel-Zeichen. Auf solche Art werden zuweilen ein paar Wurzel-Größen gleichartig, die es vorher nicht waren. So ist $\sqrt[n]{a^n b^m} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b^m}$ (48§) $= a\sqrt[n]{b^m}$, und $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4.2} + \sqrt{9.2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

53 §.

Potenzen, die gleiche Wurzeln haben, in einander zu multipliciren.

Aufl. Das Product ist eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent ist die Summe der Exponenten ihrer Factoren. So ist z. E. $a^3 a^5 = a^8$, $b^3 b^7 b^2 = b^{12}$ u. s. f.

Beweis. Das Product muß alle gleiche Factoren der in einander multiplicirten Potenzen enthalten. Die Exponenten der letztern zeigen an, wie viel derselben jede enthalte, also zeigt die Summe aller Exponenten, wie viel das ganze Product enthalte.

54 §.

Mit Beobachtung dieser Regel lassen sich also auch zusammengesetzte Ausdrücke, die nach den Potenzen einer gewissen Größe geordnet sind, in einander multipliciren, wie das beygefügte Exempel zeiget.

$$\begin{array}{l} ax^3 - bx^2 - cx + e \\ fx^2 - gx + h \\ \hline af.x^5 - bf.x^4 - cf.x^3 + ef.x^2 - eg.x + eh. \\ \quad -ag \quad + bg \quad + cg \quad - ch. \\ \quad\quad\quad + ah \quad - bh. \end{array}$$

Bey

Bey der Rechnung selbst geht man am bequemsten so zu Werke. Nachdem beyde Factoren gehörig geordnet sind, multiplicirt man zuerst mit dem höchsten Gliede des Multiplicators, hierauf mit dem nechstniedrigen Gliede, u. s. f. das ganze Multiplicandum. Diejenigen einzelnen Producte, welche in einerley Potenz multiplicirt sind, setzt man unter einander hin, und der Kürze wegen schreibt man nur die Coefficienten unter einander, nachdem das erste mahl die darin zu multiplicirende Potenz beygesetzt worden. Auf die Art ergiebt sich das Product von selbst, nach den Potenzen von eben der Größe geordnet, wornach die Factoren geordnet sind. Der im Exempel herausgebrachte Ausdruck bedeutet nun eben so viel, als ob man geschrieben hätte $afx^5-(bf+ag)x^4+(bg+ah-cf)x^3+(ef+cg-bh)x^2-(eg+ch)x+eh$.

Die Coefficienten der Glieder können selbst Potenzen andrer Buchstaben enthalten, als derjenigen, wornach die Factoren geordnet sind, da man denn bey ihrer Multiplication eben die Regel des vor. § anbringen muß. Z. E.

$$\begin{array}{l} x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 \\ x^2-2ax+a^2 \\ \hline x^5-3ax^4+3a^2x^3-a^3x^2+2a^4x-a^5 \\ \quad -2a\ +6a^2\ -6a^3\ +3a^4 \\ \quad\quad +a^2\ -3a^3 \end{array}$$

In diesem Exempel lassen sich die Coefficienten des Products durch die würkliche Addition kürzer zusammen ziehen. Man erhält nemlich

$$x^5-5ax^4+10a^2x^3-10a^3x^2+5a^4x-a^5.$$

55 §.

Eine größere Potenz durch eine kleinere von eben der Wurzel zu dividiren.

Aufl. Man subtrahire den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendi. Der gesuchte Quotient wird eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent der herausgebrachte Rest seyn. So ist $\frac{a^5}{a^3} = a^2$, $\frac{b^7}{b^4} = b^3$, u. s. f. Wenn man erweget, daß im Dividendo so viel gleiche Factoren wegfallen müssen, als im Divisor vorhanden sind: so fällt die Richtigkeit der Regel sogleich in die Augen.

56 §.

Mit Anwendung dieser Regel läst sich nun auch die Division bewerkstelligen, wenn das Dividendum und der Divisor zusammengesetzte nach den Potenzen einer gewissen Größe geordnete Ausdrücke sind. Man verfährt übrigens eben so, wie im 26 § gewiesen worden. Z. E.

$x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5 \mid x^2 - 2ax + a^2$

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$x^5 - 3ax^4 + 3a^2x^3 - a^3x^2$

$-2ax^4 + 7a^2x^3 - 9a^3x^2 + 5a^4x - a^5$

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$-2ax^4 + 6a^2x^3 - 6a^3x^2 + 2a^4x$

$+a^2x^3 - 3a^3x^2 + 3a^4x - a^5$

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$+a^2x^3 - 3a^3x^2 + 3a^4x - a^5$

0

57 §.

Wurzeln, die gleiche Wurzel-Exponenten haben, multiplicirt man in einander, wenn man ein Product aus den Größen unter dem Wurzel-Zeichen der Factoren macht, und demselben das Wurzelzeichen mit eben dem Exponenten voransetzt. Denn es ist $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$ (48 §). Eine Wurzel wird durch eine andre von eben dem Exponenten dividirt, wenn man die Größe unter dem Wurzelzeichen des Dividendi, durch die Größe unter dem Wurzelzeichen des Divisors dividirt, und dem Quotienten das Wurzelzeichen mit eben dem Exponenten voransetzt. Denn es ist $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (48 §). Kommen demnach unter den Theilen zusammengesetzter Größen, die in einander multiplicirt, oder dividirt werden sollen, auch Wurzeln vor; so wird man die Rechnung mit Beybehaltung dieser Regeln ebenfalls nach dem 23 und 26 § führen.

Exempel.

$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

mult. mit $3a + \sqrt{\frac{abb}{c}}$

$$+\frac{2ax}{c} \cdot \sqrt{\frac{abb}{c}} - \sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$$

$$\frac{6a^2x}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

wo man den letzten Theil $\gamma\frac{a^4bb}{cc}$ auch durch $\frac{aab}{c}$ ausdrücken kan.

58 §.

Eine Potenz von neuen auf eine Potenz eines gegebenen Exponenten zu erheben.

Aufl. Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem neuen Exponenten. Das Product wird der Exponent der verlangten Potenz von eben der Wurzel seyn. Es ist z. E. $(a^3)^2=a^6$, $(b^7)^3=b^{21}$, $(x^5)^6=x^{30}$ u. s. f., und überhaupt $(a^m)^n=a^{mn}$.

Beweis. Dies ist eine leichte Folge aus dem 53 §. Man soll nemlich ein Product so vieler, den gegebenen Potenzen gleicher, Factoren machen, als der neue Exponent anzeigt. Dies Product ist die Summe aller Exponenten der Factoren, und diese sind alle gleich: also muß der Exponent der gegebenen Potenz so vielmahl genommen werden, als der neue Exponent ausdrückt, das heist, man muß jenen mit diesem multipliciren. So wäre $(a^3)^4=a^{3+3+3+3}=a^{12}$ u. s. f.

59 §.

Die Wurzel einer verlangten Ordnung aus einer gegebenen Potenz auf eine andre Art als durch das vorangesetzte Wurzelzeichen auszudrücken.

Aufl. Man dividire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem verlangten Wurzel-Exponenten. Wenn man den Quotienten für den Exponenten einer Potenz von eben der Wurzel nimt; so wird

diese

diese Potenz der verlangten Wurzel gleich seyn. So ist $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$, und überhaupt $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Beweis. Es sey $\sqrt[n]{a^m} = R$: so ist $a^m = R^n$ (47 §) oder $a^{\frac{m}{n} \times n} = R^n$. Wenn nun $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist: so ist $a^{\frac{m}{n} \times n} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ (39 §). Also $R^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ und $R = a^{\frac{m}{n}}$. So erhellet die Richtigkeit der Auflösung, wenn m durch n ohne Rest theilbar ist. Aber man kan die Sache so allgemein machen, daß sie sich auch auf die Fälle erstreckt, wenn m durch n, d. i. der Exponent der Dignität durch den Wurzel-Exponenten nicht ohne Rest theilbar ist.

Eine Wurzel aus einer Größe ausziehen heist nemlich nichts anders, als die Zahl in so viel gleiche Factoren zerfällen, als der Wurzel-Exponent anzeigt, und einen davon behalten. Weil nun die erste Dignität einer Größe a oder a^1 diese Größe selbst ist, so werden die Ausdrücke $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. die Größe eines jeden Factors bedeuten, die man erhält, wenn man a in zwey, drey, vier, u. s. f. gleiche Factoren theilet. Ueberhaupt also bedeutet $a^{\frac{1}{n}}$ die Größe eines jeden der Factoren, die man erhält, wenn a in n Factoren getheilt wird. Demnach ist

der

der Ausdruck $a^{\frac{1}{n}}$ mit dem Ausdrucke $\sqrt[n]{a^1}$ oder $\sqrt[n]{a}$ einerley.

Aber deswegen ist auch der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ mit $\sqrt[n]{a^m}$ einerley. Denn $a^{\frac{m}{n}}$ bedeutet nun nichts anders, als die Größe eines jeden der Factoren, die man erhält, wenn a^m in n gleiche Factoren zerfället wird, und eben dies bedeutet der Ausdruck $\sqrt[n]{a^m}$.

60 §.

Bruchpotenzen heissen solche Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, die sich nicht auf ganze Zahlen bringen lassen.

Bruchpotenzen sind also eigentlich Wurzeln aus andern Potenzen, und dieserwegen könnte es scheinen, als wenn man hier die im 44 § festgesetzte Bedeutung des Nahmens einer Potenz zu sehr verlasse. Allein dergleichen Bruchpotenzen sind würklich eigentlich sogenannte Potenzen von Größen, die man zugleich als Wurzeln anderer Größen betrachtet. So ist $a^{\frac{m}{n}}$ eben so viel, als $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, oder in speciellen Fällen $a^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$, $b^{\frac{3}{4}} = \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3$ u. s. f. Es ist nemlich $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{aa} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}$ (57 §) $= a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$, und $b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{bbb} = b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} = \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3$.

Demnach bedeutet der Ausdruck $a^{\frac{2}{3}}$ ein Product aus zwoen von den 3 gleichen Factoren, worin sich a zerfällen läst, und $b^{\frac{3}{4}}$ ein Product aus dreyen von den

den 4 gleichen Factoren, worin sich b zerfällen läst.

So wird überhaupt $a^{\frac{m}{n}}$ ein Product aus m von den n gleichen Factoren bedeuten, worin sich a zerfällen läst. Denn es ist $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a.a.a. - - - - a}$, wo man sich vorstellen muß, daß der Buchstab a m mahl unter dem Wurzelzeichen stehe. Also auch $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} - - - - a^{\frac{1}{n}}$ (48 §) $= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ (44 §).

61 §.

Die im 52, und 54 § erwiesenen Regeln für die Multiplication und Division der Potenzen, die einerley Wurzel, und ganze Zahlen zu Exponenten haben, gelten auch für die Bruchpotenzen, wenn ihre Exponenten gleiche Nenner haben.

Beweis. Es ist $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^r}$ (59 §) $= \sqrt[n]{a^m a^r}$ (48 §) $= \sqrt[n]{a^{m+r}}$ (52 §) $= a^{\frac{m+r}{n}}$ (59 §); und $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^r}}$ (48 §) $= \sqrt[n]{a^{m-r}}$ (54 §) $= a^{\frac{m-r}{n}}$ (59 §). So erhellet die Richtigkeit des Satzes, wenn die Exponenten Brüche von einerley Nenner sind.

62 §.

Eine Bruchpotenz $a^{\frac{m}{n}}$ erhebt man auf eine neue

neue Potenz eines ganzen Exponenten r, wenn man den gebrochnen Exponenten $\frac{m}{n}$ in den ganzen Exponenten r multiplicirt.

Beweis. Es ist $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2 = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m+m}{n}}$ (61 §) $= a^{\frac{2m}{n}}$ und überhaupt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}} \ldots . a^{\frac{m}{n}}$, wo man $a^{\frac{m}{n}}$ so vielmahl hinschreiben müste, als r die Einheit enthält. Dies Product ist nach dem 61 § eine Potenz eines gebrochnen Exponenten, dessen Nenner n ist, und dessen Zehler m so vielmahl enthält, als r die Einheit. Also wird überhaupt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{mr}{n}}$.

Man setze nun $a^{\frac{mr}{n}} = A$; so ist $\sqrt[n]{a^{mr}} = A$ (59 §). Also $a^{mr} = A^n$, und $a^m = A^{n:r}$ (59 §). Wenn nun $n:r$ eine ganze Zahl ist; so wird $a^{\frac{m}{n:r}} = A$, und $a^{\frac{m}{n:r}} = a^{\frac{mr}{n}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r$. Aber es ist sowohl $\frac{mr}{n}$ als auch $\frac{m}{n:r} = \frac{m}{n} \times r$, und es war nöthig zu zeigen, daß beyde Arten einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, hier statt finden.

Man siehet ohne Schwierigkeit, wie der letzte Ausdruck mit dem ersten zusammen hänge. Der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ verlangt, man soll a^m in n gleiche Facto-

Factoren zerfällen. Also will der Ausdruck $a^{\frac{m}{n:2}}$ man soll a^m nur in halb so viel gleiche Factoren, als vorhin zerfällen. Wäre nun $a^m = \overset{1\,2\,3\,4\,5\,6}{aaaaaa}\text{----}\overset{n-1\,n}{a\,a}$ (wo die über a gesetzten Ziffern anzeigen, daß so viele a nach einander folgen, als jede solche Zahl die 1 enthält) so wäre auch $a^m = \overset{1\quad 2\quad 3\qquad\qquad n:2}{a^2 a^2 a^2 \text{----} a^2}$, und es bleiben nur halb so viel Factoren, die $= a^2$ sind, als vorhin. Also ist a^2 einer von den gleichen Factoren, die herauskommen, wenn a^m nur in halb so viel, als vorhin, zerfället wird. Nun ist $a = a^{\frac{m}{n}}$ also $a^2 = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2$, aber auch $a^2 = a^{\frac{m}{n:2}}$, also $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2 = a^{\frac{m}{n:2}}$. Man siehet leicht, daß auf eben die Art $a^3 = a^{\frac{m}{n:3}}$, $a^4 = a^{\frac{m}{n:4}}$, und überhaupt $a^r = a^{\frac{m}{n:r}}$ herauskommen werde.

63 §.

Aus einer Bruchpotenz $a^{\frac{m}{n}}$ zieht man die Wurzel der Ordnung r, wenn man den Exponenten $\frac{m}{n}$ mit dem Wurzel-Exponenten dividirt.

Beweis. Es sey $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = R$, so ist $a^{\frac{m}{n}} = R^r$ und $a^m = R^{rn}$ (62 §). Hieraus folgt einmahl, es

sey $a^{m:r} = R^n$, und $a^{\frac{m:r}{n}} = R = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}$, wenigstens, wenn $m:r$ eine ganze Zahl ist. Es folgt aber auch aus eben dem Ausdruck $a^m = R^{rn}$, es sey $a^{\frac{m}{rn}} = R = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}$. Nun ist sowohl $\frac{m:r}{n}$, als auch $\frac{m}{rn} = \frac{m}{n} : r$, also ist überhaupt $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{\frac{m}{n}}{r}}$

Man kan über die Natur der Ausdrücke $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m:r}{n}} = a^{\frac{m}{n \times r}}$ leicht ähnliche Betrachtungen mit denjenigen anstellen, die über die Ausdrücke $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{mr}{n}} = a^{\frac{m}{n:r}}$, dem 62 § beygefügt sind. Dies dienet nicht allein dazu, sich die Ausdrücke desto geläufiger zu machen; sondern man gewöhnet sich zugleich dadurch, beym calculiren zu denken, und die Resultate der Rechnungen richtig zu beurtheilen.

64 §.

Die Grösse einer Bruchpotenz ändert sich nicht, wenn man Zehler und Nenner des Exponenten mit einerley ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt.

Beweis. Es ist $a^{\frac{m \times r}{n \times r}} = \sqrt[r]{a^{\frac{mr}{n}}}$ (63 §) $= \sqrt[r]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r}$ (62 §) $= a^{\frac{m}{n}}$ (46 §) und $a^{\frac{m:r}{n:r}} = \sqrt[r]{}$

$\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n:r}}}$ (63 §) $= \sqrt[r]{\left(\frac{m}{n}\right)^r}$ (62 §) $= a^{\frac{m}{n}}$ (46 §).

65 §.

Der Satz des 61 § bleibt noch richtig, wenn gleich die Exponenten der Factoren, oder des Divisors und Dividendi nicht Brüche von gleichen Nennern sind.

Beweis. Man kan diese Brüche auf gleiche Benennung bringen nach dem 99 § der Rechenkunst; dies ändert die Größe der Potenzen selbst nicht (64 §).

Demnach ist $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} \cdot a^{\frac{nr}{ns}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}}$,

und $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}}$ (61 §).

Da eine ganze Zahl als ein Bruch angesehen werden kan, dessen Nenner $= 1$ ist; so bleibt die Regel noch richtig, wenn gleich die eine Potenz einen ganzen, und die andre einen gebrochnen Exponenten hat.

66 §.

Den Quotienten zu finden, wenn Dividendum und Divisor Potenzen ganzer Exponenten von einerley Wurzel sind, das Dividendum aber kleiner als der Divisor ist.

Aufl. Der Quotient ist ein Bruch, dessen Zehler $= 1$ ist, und der Nenner eine Potenz von eben der Wurzel, deren Exponent der Ueberschuß des Exponenten im Divisor über den Exponenten des Dividendi ist. Es ist nemlich $\frac{a^n}{a^{m+n}} = \frac{a^n : a^n}{a^{m+n} : a^n}$

$= \frac{1}{a^m}$ (55 §). Man kan die Regel des 55 § auf

diesen Fall erweitern, wenn man nach den Regeln der allgemeinen Subtraction des 11 und 12 § verfährt, und $\frac{a^n}{a^{m+n}} = a^{-m}$ setzt. Es wird a^{-m} eben so viel, als $\frac{1}{a^m}$ bedeuten.

Bey jeder Größe kan man sich nemlich den Factor 1 vorstellen; es ist $a = 1 \times a$, und $a^m = 1 \times a^m$. Eine Größe a auf die Potenz m erheben, heist also, die Einheit mit a m mahl nach einander multipliciren, und der Exponent drückt aus, wie viel mahl die Multiplication vorgenommen ist. Aber eine Größe mit einer andern multipliciren, und wieder dividiren, sind entgegengesetzte Operationen. Ist eine Größe etliche mahl mit einer andern multiplicirt worden, und wird durch eben dieselbe wieder etliche mahl dividirt: so nimt die Anzahl der gleichen Factoren, um welche das Product gewachsen war, um eben so viel ab, so vielmahl man darin dividirt. Demnach sind im Ausdruck $\frac{a^m}{a^r} = \frac{1 \times a^m}{a^r}$ die Exponenten des Dividendi und Divisors entgegengesetzte Größen (1 §): und wenn man mehrmahl mit a dividirt, als vorher die 1 damit multiplicirt war, so wird hiedurch nicht allein die Anzahl der gleichen Factoren im Product völlig aufgehoben; sondern es bleiben von der Anzahl der gleichen Divisoren so viel übrig, als ihr Ueberschuß über die Anzahl der Factoren beträgt. Also verwandelt sich die Anzahl gleicher Factoren, womit 1 multiplicirt war, nun in eine Anzahl gleicher Divisoren, und dies bezeichnet das vorangesetzte Zeichen

(—),

(—), in dem Ausdruck $\frac{a^n}{a^{m+n}} = a^{--m}$. Man mag die Einheit mit a multipliciren oder dividiren: so verändert man sie beyde mahl in einerley geometrischem Verhältniß, aber auf entgegengesetzte Art: im ersten Fall im Verhältniß $1:a$, im zweeten Fall im Verhältniß $a:1$, und dies letzte Verhältniß ist zwar dem ersten gleich, aber entgegengesetzt. Also bedeutet a^{--m} eine m mahl nach einander in einem dem Verhältniß $1:a$ entgegengesetzten Verhältniß, veränderte Einheit.

Eine Potenz, wie a^{--m} wird nach der Regel des 58 § auf eine neue Potenz des ganzen Exponenten n erhoben. Denn es ist $(a^{--m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{--mn}$.

Man ziehet auch nach der Regel des 59 §. aus einer solchen Potenz die Wurzel eines ganzen Exponenten. Denn man erhält $\sqrt[n]{a^{--m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{m:n}} = a^{--\frac{m}{n}}$.

Es ist nemlich so viel, als wenn die Einheit m mahl nach einander mit $a^{\frac{1}{n}}$ dividirt worden. Daher bleibt die erwiesene Regel noch richtig, wenn gleich die Exponenten Brüche sind.

Denn es ist $\frac{a^{\frac{n}{r}}}{a^{\frac{n+m}{r}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{r}}} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^m}}$

$= \sqrt[r]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{r}}$.

67 §.

Jede Potenz ist $= 1$, wenn ihr Exponent $= 0$ ist.

Beweis. Es ist $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$, was auch a bedeutet. So wie der Ausdruck a^m anzeigt, man soll die 1 mit a m mahl multipliciren, und der Ausdruck a^{-m} haben will, es soll die 1 mit a m mahl dividirt werden: so verlangt a^0, man soll die 1 mit a weder multipliciren, noch dividiren, oder man soll sie gar nicht ändern.

68 §.

Der Satz des 61 § ist ganz allgemein richtig, wenn auch die Exponenten der Potenzen durch die + und − unterschieden sind; nur muß man alsdenn die Exponenten nach den Regeln des 1 Abschn. addiren, oder subtrahiren.

Beweis. Vermöge des 66 § ist

$a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$

$a^{+n} \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

a^{-n}.

$$a^{--n} \cdot a^{+m} = \frac{1}{a^n} \cdot a^m = \frac{a^m}{a^n} = a^{m--n} = a^{-n+m}$$

$$a^{--n} : a^{--m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-n+m}$$

$$a^{+n} : a^{-m} = a^n : \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^{-n} : a^{+m} = \frac{1}{a^n} : a^m = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{--n--m}$$

Die Buchstaben n und m können hier auch Brüche bedeuten.

69 §.

Wenn die Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks Potenzen einer Größe enthalten, wovon in andern Theilen eben des Ausdrucks Wurzeln vorkommen, und man drückt die Wurzeln durch Bruchpotenzen aus: so wird der Ausdruck denjenigen ganz ähnlich, die im 50, u. f. §. § betrachtet worden. Man kan nun einen solchen Ausdruck ebenfalls nach einem Buchstaben ordnen, wenn man die negativen Exponenten als solche betrachtet, die kleiner, als positive sind, und wachsende negative, als abnehmende positive. Demnach läst sich der Ausdruck

$$a\sqrt[3]{x} + bx^2 - c\sqrt[4]{x^3} + fx + \frac{g}{\sqrt{x}}$$

so verändern

$$ax^{\frac{1}{3}} + bx^2 - cx^{\frac{2}{3}} - ex^{\frac{3}{4}} + fx + gx^{-\frac{1}{2}}$$

und man ordnet ihn auf die Art:

$$bx^2 + fx - ex^{\frac{3}{4}} - cx^{\frac{2}{3}} + ax^{\frac{1}{3}} + gx^{-\frac{1}{2}}.$$

Dies verkürzt alle vier Rechnungsarten mit sol-

solchen zusammengesetzten Ausdrücken ungemein. Nachdem man sie gehörig verändert, und geordnet hat, geht man bey der Rechnung völlig so zu Werke, wie im 50. 51. 54. 56 § gewiesen worden.

Soll man den Ausdruck $a\sqrt[3]{x} + bx - \frac{c}{\sqrt[3]{x}} - \frac{e}{\sqrt[3]{x^2}} + f - g\sqrt[3]{x^2}$ mit $x - f\sqrt[3]{x^2}$ multipliciren: so rechnet man auf folgende Art:

$$\begin{array}{l} bx - gx^{\frac{2}{3}} + ax^{\frac{1}{3}} + fx^0 - cx^{-\frac{1}{3}} - ex^{-\frac{2}{3}} \\ x - fx^{\frac{2}{3}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} bx^2 - gx^{\frac{5}{3}} + ax^{\frac{4}{3}} + fx - cx^{\frac{2}{3}} - ex^{\frac{1}{3}} \\ \quad - bf + fg - af - ff + cf + ef \end{array}$$

Wenn aber der Ausdruck

$$af\sqrt[5]{x^3} - (ag + bf)\sqrt[5]{x} - \frac{cg}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{bg}{\sqrt[5]{x}} + cf$$

durch $f - \frac{g}{\sqrt[5]{x^2}}$ dividirt werden soll: so wird die Rechnung so geführt:

$$cf+afx^{\frac{3}{5}}-cgx^{-\frac{2}{5}}-(ag+bf)x^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}} \;\Big|\; c+ax^{\frac{3}{5}}-bx^{\frac{1}{5}}$$

$$f-gx^{-\frac{2}{5}}$$

$$cf-cgx^{-\frac{2}{5}}$$

$$-afx^{\frac{3}{5}}-(ag+bf)x^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}}$$

$$f-gx^{-\frac{2}{5}}$$

$$afx^{\frac{3}{5}}-agx^{\frac{1}{5}}$$

$$-bfx^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}}$$

$$f-gx^{-\frac{2}{5}}$$

$$-bfx^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}}$$

$$0$$

Der IV. Abschnitt.

Von Ausziehung der Wurzeln aus Quadrat- und Cubik-Zahlen.

70 §.

Die Quadrate aller einfachen Ziffern kommen im Ein mahl Eins vor. Es sind folgende

Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Wem also das Ein mahl Eins geläufig ist, der wird sich leicht auf die Wurzel besinnen, wenn eins von diesen neun Quadraten vorkomt. Uebrigens erhellet,

daß das Quadrat einer einfachen Ziffer höchstens aus zwoen Ziffern bestehe.

Wenn an einer der einfachen Ziffern zur Rechten Nullen hängen: so bestehet ihr Quadrat aus eben den Ziffern mit doppelt so vielen Nullen (37 §. R.). Also ist umgekehrt die Wurzel eines dieser neun Quadrate, wenn daran eine grade Anzahl von Nullen hängt, die Wurzel der Ziffern mit halb so vielen Nullen, als das Quadrat enthält.

71 §.

Soll man aus einer ganzen Zahl, die höchstens aus zwoen Ziffern bestehet, aber unter den neun Quadratzahlen des vor. § nicht vorkomt, die Quadratwurzel suchen; so läst sich diese weder durch eine ganze noch gebrochne Zahl genau ausdrücken (190 §. R.). Wenn man aber die Wurzeln der beyden Quadrate nimt, zwischen welchen die gegebene Zahl fällt; so hat man zwo Grenzen dieser Wurzel, die nur um 1 unterschieden sind. Z. E. $5 < \sqrt{31}$, und $6 > \sqrt{31}$. Nimt man demnach in solchen Fällen die Wurzel des nechst kleinern unvollkommenen Quadrats für die gesuchte an, so irret man noch nicht um eine ganze Einheit.

72 §.

Wenn eine Zahl aus zweenen Theilen bestehet: so ist ihr Quadrat aus dem Quadrat des ersten Theils, dem doppelten Product des ersten Theils in den zweeten, und dem Quadrat des zweeten Theils zusammengesetzt. Denn es ist $(a+b)(a+b) = aa+2ab+bb$ (23 §). Also ist z. E. das Quadrat der Zahl $99 = (90+9)^2 = 8100+1620+81$.

73 §.

Das Quadrat einer Ziffer der ersten Decimal-Ordnung, d. i. einer einfachen Ziffer woran eine Null hängt, hat zwey Nullen (71 §), und weil das Quadrat dieser Ziffer höchstens aus zwoen Ziffern besteht: so kan die höchste Ziffer des Quadrats nur höchstens bis in die Stelle der Tausender kommen, und die niedrigste komt in die Stelle der Hunderte. Z. E. $90 \times 90 = 8100$. Und weil das doppelte Product zwoer einfachen Ziffern in einander höchstens nur drey Ziffern haben kan; so komt die höchste Ziffer des doppelten Products einer Ziffer, die zu den Zehnern gehört, in eine einfache, ebenfalls höchstens in die Stelle der Tausende, wie z. E. $2 \times 90 \times 9 = 1620$.

74 §.

Bestehet eine Zahl aus mehr, denn zwoen Ziffern: so kan man sie in zweene Theile zerfällen, davon der erste ihre höchste Ziffer, und der zweete die übrigen alle enthält. Z. E. $324 = 300 + 24$. Aber wenn eine solche Zahl auch nur drey Ziffern hat: so bestehet das Quadrat des höchsten Theils wenigstens aus fünf Ziffern. Und überhaupt wird das Quadrat einer jeden Ziffer wenigstens aus doppelt so viel einfachen Ziffern weniger eins bestehen, als die Wurzel enthält.

Wenn demnach eine Zahl aus drey, oder vier Ziffern bestehet: so muß ihre Quadrat-Wurzel aus zwoen und nicht mehrern Ziffern bestehen, dafern sich nemlich ihre Wurzel durch eine ganze Zahl ausdrücken läst.

75 §.

Wenn man eine Zahl, die aus drey oder vier Ziffern

fern bestehet, von der Rechten gegen die Linke in Classen eintheilet, so daß entweder jede Classe zwo Ziffern, oder auch die Linke nur eine bekomt: so enthält die linke Classe das ganze Quadrat des Zehners der Wurzel, und vielleicht auch etwas von dem doppelten Product des Zehners in den Einer der Wurzel (73 §). In der rechten Classe höchsten Stelle fängt das doppelte Product beyder Theile an, und in der niedrigsten Stelle das Quadrat des Einers, so in dieser Classe ganz enthalten ist (70. 73 §).

76 §.

Ob nun gleich in der linken Classe mehr, als das Quadrat des Zehners der Wurzel enthalten seyn kan: so kan doch diese linke Classe von keinem größern Zehner das Quadrat enthalten, als von demjenigen, welcher der erste Theil der Wurzel ist. Wäre die Ziffer des Zehners α, und die Ziffer des Einers der Wurzel β; so wäre die Zahl selbst $= \alpha \times 10 + \beta$. Aber der nechst größere Zehner ist $(\alpha+1).10 = \alpha.10 + 10$. Das Quadrat jener Zahl ist $\alpha^2.100 + 2\alpha\beta.10 + \beta_2$, und das Quadrat dieser Zahl $= \alpha^2.100 + 2\alpha\ 10.10 + 10.10$. Weil nun allemahl $\beta < 10$ ist: so ist das erste Quadrat allemahl kleiner, als das letztere.

77 §.

Eine ganze Zahl bestehet aus drey, oder höchstens vier Ziffern, man soll ihre Quadrat-Wurzel suchen.

Aufl. Wenn man die gegebene Zahl in Classen eintheilt, so daß wenigstens die rechte Classe zwo Ziffern bekomt; so steckt das Quadrat des ersten Theils der Wurzel in der linken Classe (75 §). Ist demnach

nach die Ziffer der linken Classe eine vollkommene Quadratzahl aus dem 70 §: so ist ihre Wurzel der höchste Theil der gesuchten Wurzel: widrigenfalls wird doch die Wurzel der nechst kleinern vollkommenen Quadratzahl, der höchste Theil der gesuchten Wurzel seyn (76 §). Wenn man diesen hat, so ist es leicht den zweeten Theil zu finden, und man geht bey der Rechnung so zu Werke.

Es sey z. E. die Zahl 2916 gegeben: so schreibe man unter der linken Classe 29 die nechstkleinere Quadratzahl 25, aus dem 70 §. Diese ist das Quadrat des ersten Theils der Wurzel. Rechter Hand ziehe man einen Strich herunter, wie man es beym dividiren macht, und setze auf der andern Seite des Strichs die Wurzel dieses Quadrats, nemlich 5, als den gefundenen ersten Theil der Wurzel. Man subtrahire die Quadratzahl 25 von der höchsten Classe: so bleibt 4. Nimt man hiezu die höchste Ziffer der folgenden Classe; so steckt in den beyden Ziffern 41 das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel in den zweeten (73 §). Also duplire man den gefundenen höchsten Theil der Wurzel nemlich 5, und schreibe dies Product 10 so unter, daß die niedrigste Ziffer 0 unter der höchsten Ziffer 1 der zweeten Classe zu stehen komt, und dividire die Zahl 41 mit dem Product 10: so muß der Quotient wenigstens nicht kleiner, als der zweete Theil der Wurzel seyn. Aber er könte wohl größer seyn, weil in diesem Rest noch etwas zum Quadrat des zweeten Theils gehöriges stecken könte,

29	16	54
25		
4	16	
1	0	
4	0	
	16	
	16	
	0	

Des-

Deswegen multiplicire man nun den gebrauchten Divisor 10 in den gefundenen niedrigsten Theil der Wurzel 4, und subtrahire das Product vom Dividendo 41. Gienge dies nicht an, so müste man den zweeten Theil der Wurzel so lange um 1 vermindern, bis man das Product subtrahiren kan.

Im Exempel bleibt 1 oder eigentlich 10 zum Rest. Wenn hiemit die letzte Ziffer 6 verbunden wird, so muß die noch übrige Zahl 16 das Quadrat des niedrigsten Theils 4 von der Wurzel seyn. Man mache also dies Quadrat, und subtrahire es von dem noch übrigen Rest. Wenn alles aufgehet, so hat man die Wurzel genau gefunden. Bleibt aber ein Rest; so ist es ein Beweis, daß man die Wurzel nicht genau angeben kan, und die gefundene Wurzel ist zu klein. Aber die wahre Wurzel ist nun keine ganze Einheit größer, als die gefundene. Also hat man wenigstens zwo Grenzen der gesuchten Wurzel, die nur um 1 unterschieden sind.

Dieser letzte Fall würde sich ergeben, wenn man aus der Zahl 5628 die Wurzel suchen wollte, wie die nebenstehende Berechnung zeiget, wo die Zahl 3 zum Rest bleibt, und also die Wurzel zwischen 75 und 76 fält. Es ist hier bey der Rechnung zugleich eine kleine Verkürzung angebracht. Nachdem nemlich durch die Division des doppelten ersten Theils 14 der Wurzel in 72 der zweete Theil 5 gefunden worden, ist das doppelte Product mit dem Quadrat des zweeten Theils der Wurzel in eine Summe zusammengezogen, und beydes auf einmahl subtrahirt. Man macht nemlich gleich nachdem der zweete Theil 5

```
56 | 28 | 75
49 |    |
---
728
 14
725
---
  3
```

durch

durch die Division gefunden ist, sein Quadrat 25, schreibt dessen niedrigste Ziffer 5 gehörig unter, und behält die höchste Ziffer 2 in mente. Nun multiplicirt man den doppelten ersten Theil 14 in den zweeten 5, und rechnet das, was in mente geblieben war, gehörig dazu. So erhält man $4 \times 5 = 20$ und 2 dazu giebt 22, wovon wieder 2 in mente bleiben, da dann $1 \times 5 + 2$ die höchste Ziffer 7 der zu subtrahirenden Zahl giebt.

78 §.

Man pflegt die Anzahl der Nullen, welche an einer Ziffer anzuhängen ist, der Kürze wegen auch wohl durch kleine über der niedrigsten Ziffer gesetzte Zahlen anzudeuten, so daß z. E. $29\overset{8}{1}6$ so viel ist, als 291600000000. Diese Zahl zeigt also an, zu welcher Decimal-Ordnung diejenige Ziffer gehöre, über welcher sie gesetzt ist, oder in welcher Stelle nach dem Ort der Einer sie folgen müsse. Man kan sie füglich den Exponenten der Ordnung dieser Ziffer nennen.

Es hat demnach das Product zwoer Ziffern verschiedener Ordnungen zum Exponenten seiner niedrigsten Ziffer die Summe der Exponenten der Factoren: und der Exponent der Ordnung des Quotienten zwoer Ziffern, die zu verschiedenen Ordnungen gehören, wird gefunden, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendi subtrahirt. Denn es ist $\alpha.\beta^{m}.\beta^{n} = \alpha.10^{m} \times \beta.10^{n} = \alpha\beta.10^{m+n} = \alpha\beta^{m+n}$ und $\frac{\alpha^{m}}{\beta^{n}} = \frac{\alpha.10^{m}}{\beta.10^{n}} = \frac{\alpha}{\beta} \times 10^{m-n} = \frac{\alpha^{m-n}}{\beta}$.

Wenn

Wenn also an einer Zahl, sie mag aus so vielen Ziffern, als sie wolle, bestehen, rechter Hand Nullen hängen: so ist ihr Quadrat das Quadrat der Ziffern mit doppelt so viel Nullen. Und umgekehrt: Wenn an einer vollkomnen Quadratzahl eine grade Anzahl von Nullen hängt: so ist ihre Quadratwurzel, die Quadratwurzel der Ziffern, mit halb so viel Nullen. Auf solche Art wird $\sqrt{29\overset{12}{1}6\overset{6}{}} = 54$, und überhaupt $\sqrt{29\overset{2n}{1}6\overset{n}{}} = 54$.

Die Ziffern der Decimal-Brüche sind ebenfalls einfache Ziffern, die in Potenzen der 10, die negative Exponenten haben, multiplicirt sind. So ist z. E. $43,25 = 4 \times 10 + 3 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$. Demnach wird der Exponent der Ordnung solcher Ziffern eine verneinte Zahl.

79 §.

Jede vollkommene Quadratzahl bestehet höchstens aus doppelt so vielen Ziffern, als ihre Wurzel.

Beweis. Eine Zahl mag aus so vielen Ziffern, als sie wolle, bestehen: so ist die Einheit, mit so viel angehängten Nullen, als jene Zahl Ziffern hat, schon größer, als diese Zahl. Z. E. $100 > 99$, $1000 > 999$, $10000 > 9999$, u. s. f. Also ist z. E. $100000000 > 9999^2$. Aber 100000000 ist die kleinste unter den Zahlen, die 9 Ziffern haben. Also kan 9999^2 nicht mehr als 8 Ziffern enthalten, weil sonst 9999^2 entweder $=$ oder $>$ 100000000, und also $9999^2 > 9999^2$ wäre, welches unmöglich ist. Dieser, auf einen speciellen Fall angewandte Beweis läst

läst sich leicht allgemein machen. Es bestehe eine Zahl 53427 rc. aus n Ziffern: so ist $1 \overset{n}{>} 53427$ rc. Also $1 \overset{2n}{>} (53427 \text{ rc})^2$. Aber $1 \overset{2n}{}$ ist die kleinste unter den Zahlen, die $2n+1$ Ziffern haben. Bestünde also $(53427 \text{ rc})^2$ aus $2n+1$ Ziffern: so wäre entweder $(53427 \text{ rc})^2 \overset{2n}{=} 1$ oder $\overset{2n}{>} 1$, und in beyden Fällen $(53427 \text{ rc})^2 > (53427 \text{ rc})^2$, welches nicht seyn kan (47 §).

80 §.

Wenn man eine Quadratzahl, die aus so viel Ziffern, als man will, bestehet, z. E. 75255625 von der Rechten gegen die Linke in Classen eintheilet, und jeder Classe zwo Ziffern giebt, wie in diesem Exempel: 75|25|56|25| da dann in die höchste Classe nur eine Ziffer komt, wenn ihre Anzahl ungrade ist; so besteht die Quadratwurzel der Zahl aus so viel Ziffern, als man Classen gemacht hat. Denn die Wurzel kan nicht weniger Ziffern haben, weil man sonst weniger Classen hätte (79 §).

Hätte nemlich die Wurzel der Zahl 75255625 nur drey Ziffern: so hätte ihr Quadrat höchstens 6 Ziffern, und also nur 3 Classen. Sie kan auch nicht mehr haben, weil man sonst mehr Classen hätte (74 §). Wenn die Wurzel der obigen Zahl 5 Ziffern hätte: so müste ihr Quadrat wenigstens 9 Ziffern haben, und so hätte man 5 Classen.

81 §.

In der höchsten Classe der auf eben die Art eingetheilten Zahl steckt das ganze Quadrat von der höchsten Ziffer der Wurzel, und kein

Quadrat einer größern Ziffer von eben der Ordnung.

Beweis. Wenn man nemlich die Zahl 75255625 zum Grunde nimt: so besteht ihre Wurzel aus vier Ziffern (80 §). Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, diese Ziffern: so ist die Wurzel $= \overset{3}{\alpha}\overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma}\delta$, oder $\overset{3}{\alpha} + \overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma}\delta$. Weil nun das Quadrat von $\overset{3}{\alpha} = \overset{6}{\alpha^2}$ ist: so komt α^2 ganz in die vierte, d. i. die höchste Classe. Aber $\overset{3}{1} \triangleright \overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma}\delta$, also $\overset{3}{\alpha} + \overset{3}{1} \triangleright \overset{3}{\alpha} + \overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma}\delta$, oder $(\overset{3}{\alpha} + 1) \triangleright \overset{3}{\alpha}\overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma}\delta$; folglich auch $(\overset{6}{\alpha} + 1)^2 \triangleright (\overset{3}{\alpha}\overset{2}{\beta}\overset{1}{\gamma}\delta)^2$, d. i. $(\overset{6}{\alpha} + 1)^2 \triangleright 75255625$. Also ist in der gegebenen Zahl kein Quadrat einer Ziffer von der dritten Ordnung enthalten, die größer ist, als α. Diese Schlüsse lassen sich leicht allgemeiner machen. Hätte nemlich eine Zahl 75255625 so viel Ziffern, als man will, so daß sie sich in $n+1$ Classen theilen liesse: so hätte die Wurzel $n+1$ Ziffern. Wenn diese nun $\alpha, \beta, \gamma - - - \eta$ sind; so wäre die Wurzel $= \overset{n}{\alpha}\overset{n-1}{\beta}\overset{n-2}{\gamma} - - - \eta$, oder auch $\overset{n}{\alpha} + \overset{n-1}{\beta}\overset{n-2}{\gamma} - - - \eta$.

Nun ist $(\overset{n}{\alpha})^2 = \overset{2n}{\alpha^2}$; also komt α^2 ganz in die $(n+1)$te das ist, in die höchste Classe. Aber $\overset{n}{1} \triangleright \overset{n-1}{\beta}\overset{n-2}{\gamma} - - - \eta$, also $\overset{n}{\alpha} + \overset{n}{1} \triangleright \overset{n}{\alpha} + \overset{n-1}{\beta}\overset{n-2}{\gamma} - - - \eta$, d. i., $(\overset{n}{\alpha} + 1) \triangleright \overset{n}{\alpha}\overset{n-1}{\beta}\overset{n-2}{\gamma} - - - \eta$, und $(\overset{n}{\alpha} + 1)^2 \triangleright (\overset{n}{\alpha}\overset{n-1}{\beta}\overset{n-2}{\gamma} - - - \eta)^2$ oder $(\overset{n}{\alpha} + 1)^2 \triangleright (75255625\ \text{rc})^2$. Also ist in der gege-

gegebenen Zahl kein Quadrat von einer Ziffer der Ordnung n enthalten, die größer ist, als α.

82 §.

Wenn nun 75|25|56|25| die gegebene Zahl ist, die nach dem 80 § eingetheilt, 4 Classen giebt: so erhellet aus dem 81 §, daß 64^{6} das Quadrat des höchsten Theils der Wurzel, und also dieser höchste Theil der Wurzel selbst, nemlich $\alpha^{3} = 8^{3}$ sey. Wenn man demnach das Quadrat 64^{6} subtrahirt: so muß der Rest $11|25|56|25| = 2.\alpha\beta\gamma\delta^{3\,2\,1} + (\beta\gamma\delta)^{2\,1}$ seyn oder es ist $11|25|56|25 = 2\alpha\beta^{5} + 2\alpha\gamma^{4} + 2\alpha\delta^{3} + \beta^{2\,4} + 2\beta\gamma\delta^{2\,1} + (\gamma\delta)^{2\,1}$.

Man übersiehet es leicht, daß von den beyden Theilen $2\alpha\beta^{5}$ und $\beta^{2\,4}$ dieses Restes die niedrigste Ziffer in die dritte Classe kommen müsse. Nun bestehet β^{2} höchstens nur aus zwoen Ziffern, und die niedrigste komt in die niedrigste Stelle der dritten Classe, also steckt β^{2} in dieser Classe ganz. Aber des doppelten Products $2\alpha\beta^{3\,2} = 2\alpha\beta^{5}$ niedrigste Ziffer komt in die höchste Stelle der dritten Classe, und muß demnach in der höchsten Ziffer dieser Classe, wenn der Rest aus der vierten Classe dazu gerechnet wird, enthalten seyn. Dividirt man demnach mit $2\alpha = 16$ in 112: so könnte der Quotient wohl größer seyn, als β, weil noch etwas mehr, als $2\alpha\beta^{5}$ im Dividendo enthalten seyn könnte; aber kleiner als β wird der Quotient nicht seyn. Man nehme demnach an, dieser

ser Quotient sey β, mache die Summe $2\alpha\overset{5}{\beta}+\overset{4}{\beta}^2$ und subtrahire sie von 1125. Wenn dies angehet: so ist der gefundne Quotient würklich $=\beta$, wo nicht: so muß man ihn so lange um 1 vermindern, bis die Subtraction geschehen kan.

Dafern man nach dieser Vorschrift 112 durch 16 dividirt, so erhält man 6 (wenn man den Quotienten größer nimt, so kan man nicht subtrahiren). Da nun $2\times 8\times 6+6^2=996$: so erhält man, nach geschehener Subtraction den Rest 1295625. Es ist bey diesen Schlüssen wegen mehrerer Deutlichkeit eine bestimte Quadratzahl zum Grunde gelegt, die sich in eine bestimte Anzahl von Classen theilen läst, da sonst leicht allgemeinere Zeichen hätten gebraucht werden können. Man kan sich aber auch leicht davon versichern, daß diese Schlüsse an sich allgemein sind, und man auf eben die Art allemahl den zweeten Theil der Wurzel finde, die Zahl mag aus so viel Ziffern bestehen, wie sie wolle. Ist nemlich die Quadratzahl in $n+1$ Classen getheilt: so ist der höchste Theil der Wurzel α von der Ordnung n, und der zweete Theil β von der Ordnung $n-1$. Also ist das doppelte Product des ersten Theils in den zweeten $2\alpha\beta$ von der Ordnung $2n-1$, und das Quadrat des zweeten Theils von der Ordnung $2n-2$. Also steckt β^{2n-2} allemahl ganz in der nechst höchsten Classe, und das doppelte Product $2\alpha\beta^{2n-1}$ hat seine niedrigste Ziffer in der höchsten Stelle eben dieser Classe.

83 §.

Eben so wie im 82 § aus dem ersten Theil der Wurzel der zweete gefunden worden, läst sich nun auch

auch aus den beyden ersten zusammen, der dritte, und überhaupt, wenn schon einige der höchsten Theile der Wurzel bekannt sind, aus diesen Theilen zusammen, auf eben die Art der nechstfolgende finden. Die beyden ersten Theile der Wurzel aus der Zahl 75255625 sind $\overset{3\,2}{86}$ gefunden. Und es war

$$\begin{array}{r} \overset{6}{8}^2 = \overset{6}{64} \\ 2 \times \overset{3}{8} \times \overset{2}{6} = \overset{5}{96} \\ \overset{4}{6}^2 = \overset{4}{36} \\ \hline \end{array}$$

Also $(\overset{3\,2}{86})^2 = 7396$ (72 §).

Diese Summe hat man von obstehender Zahl subtrahirt, und es blieb der Rest 1295625. Demnach ist $75255625 = (\overset{3\,2}{86})^2 + 1295625$. Wenn nun γ und δ die beyden letzten Theile der Wurzel sind (82 §): so hat man $(\overset{3\,2\,1}{86\,\gamma\delta})^2 = 75255625 = (\overset{3\,2}{86})^2 + 2 \times (\overset{2}{86}) \times \overset{1}{\gamma\delta} + (\overset{1}{\gamma\delta})^2$ (72 §) $= (\overset{3\,2}{86})^2 + 1295625$. Folglich ist der übrig gebliebene Rest $129|56|25 = 2 \times (\overset{2}{86}) \times \overset{1}{\gamma\delta} + (\overset{1}{\gamma\delta})^2 = 2 \times 86 \times \overset{3}{\gamma} + 2 \times 86 \times \overset{2}{\delta} + \overset{2}{\gamma}^2 + 2\gamma\delta + \delta^2$. Nun komt des doppelten Products $2 \times 86 \times \overset{3}{\gamma}$ niedrigste Ziffer in die höchste Stelle der zwoten Classe vom Ende, aber des Quadrats $\overset{2}{\gamma}^2$ niedrigste Ziffer komt in die niedrigste Stelle dieser Classe, und dies Quadrat steckt ganz in dieser Classe. Aber das doppelte Product $2 \times 86 \times \overset{3}{\gamma}$ steckt in der höchsten Ziffer 5 dieser Classe, wenn der Rest aus voriger Classe 129 dazu genommen wird.

Demnach dividire man 1295 mit 2×86: so könnte zwar der Quotient größer, als γ seyn, weil das Dividendum größer, als $2 \times 86 \times \gamma$ seyn könnte. Aber er wird nicht kleiner, als γ seyn. Also nehme man an, er sey γ, und mache die Summe $2 \times 86 \times \gamma + \gamma^2$. Dafern sich diese subtrahiren läst: so ist γ richtig gefunden, widrigenfalls muß man den Quotienten so lange um 1 vermindern, bis die Subtraction geschehen kan. Auf diese Art erhält man $\gamma = 7$; $2 \times 86 \times \gamma = 1204$; $\gamma^2 = 49$; $2 \times 86 \times \gamma + \gamma^2 = 12089$. Wenn nun

vom vorigen Rest	129|56|25
subtrahirt wird	120 89
so bleibt der Rest	8 67|25

84 §.

Es sey nun überhaupt die Summe der schon gefundenen Theile der Wurzel $= \overset{r}{A}$, so daß der letzte Theil zur Ordnung r gehört, oder, nach demselben r Nullen folgen (vorhin war $A = \overset{2}{86}$). Der folgende Theil der Wurzel sey $\overset{r-1}{\gamma}$, dieser wird zur Ordnung $r-1$ gehören. Die gegebene Zahl 75255625 rc bestehe aus so viel Classen, als man will, und die $x$te Classe von der Rechten gegen die Linke sey diejenige, welche die Ziffern 56 enthält. Wenn nun die ganze Wurzel $= \overset{r}{A}\,\overset{r-1}{\gamma}\,\overset{r-2}{\delta}\text{---}\eta$ ist: so ist 75\|25\|56\|25 rc $= \overset{2r}{A^2} + 2 \times \overset{r}{A} \times (\overset{r-1}{\gamma}\,\overset{r-2}{\delta}\text{---}\eta) + (\overset{r-1}{\gamma}\,\overset{r-2}{\delta}\text{---}\eta)^2$ oder auch

$$\overset{(r+1)te}{75|25|56|25}\ rc = A^{2r} + 2 \times A^{2r-1} \times \gamma + 2 \times A^{r} \times (\delta^{r-2} - - - \eta) + \gamma^{2r-2} + 2\gamma^{r-1} \times (\delta^{r-2} - - - \eta) + (\delta^{r-2} - - - \eta)^2.$$

Nun erhellet, daß A^2 ganz in den Classen stecke, die höher, als die *r*te Classe sind. Aber das doppelte Product aus der Summe A der schon gefundenen Theile der Wurzel in den folgenden γ hat seine niedrigste Ziffer in der höchsten Stelle der *r*ten Classe, und das Quadrat des folgenden Theils γ nemlich γ^{2r-2} steckt ganz in der *r*ten Classe. Hieraus erhellet, daß das im vor. § gewiesene Verfahren allgemein diene, aus der Summe der schon gefundenen Theile der Wurzel, den nechstniedrigen zu finden.

85 §.

Eine Zahl bestehet aus so viel Ziffern, als man will, man soll ihre Quadratwurzel suchen.

Aufl. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, wie im 80 § vorgeschrieben worden.

Hierauf nehme man zuerst die beyden höchsten Classen vor, und stelle die Rechnung nach dem 77 § eben so an, als ob die Zahl nicht mehr, als diese beyden Classen hätte.

Zum übrigbleibenden Rest rechne man die folgende Classe, und wiederhole dieselbe Rechnung nur mit dem Unterschied, daß man beyde, schon gefundene Theile der Wurzel, als den ersten Theil ansiehet, dessen Quadrat schon subtrahirt worden: so erhält man den dritten Theil der Wurzel.

Zum übrig gebliebenen Rest nimt man wieder die folgende Classe, und verfährt, wie vorhin, nur daß allemahl die schon gefundenen Theile der Wurzel zusammen als der erste Theil angesehen werden, dessen Quadrat schon subtrahirt worden (84 §).

Dafern nun die gegebene Zahl eine vollkomne Quadratzahl ist: so muß in der letzten Classe nichts übrig bleiben. Bleibt also ein Rest, so hat man die Wurzel nicht völlig; aber doch so genau, daß sie von der wahren Wurzel um keine ganze Einheit unterschieden ist.

Wie in dem beygefügten Exempel die drey ersten Ziffern der Wurzel gefunden worden, ist schon im 82 und 83 § gewiesen worden. Die vierte Ziffer ist so gefunden:

75	25	56	25	8675
64				
11 25				
16				
996				
1 29 56				
1 7 2				
1 2 0 8 9				
	867	25		
	17	34		
	867	25		
		0		

Zum Rest 867 (83 §) nimt man die höchste Ziffer 2 der folgenden Classe, und dividirt 8672 mit $2 \times 867 = 1734$. Man darf den Quotienten nicht größer, als 5 nehmen, wegen der im 82 und 83 § angeführten Ursache. Nun wird $2 \times 867 \times 5 + 25 = 1734 \times 5 + 25 = 86725$, welches von 86725 abgezogen keinen Rest übrig läst. Also ist 8675 die gesuchte Wurzel.

86 §.

86 §.

Die Quadratwurzel aus einem Bruch erhält man, wenn man sowohl aus dem Zehler, als auch aus dem Nenner die Quadratwurzel auszieht (48 §). Von einer Zahl, welche aus der 1 mit einer graden Anzahl daran hängender Nullen besteht, ist die Quadratwurzel eben die 1 mit halb so viel daran hängenden Nullen (70 §). Wendet man dies auf die Decimalbrüche an: so erhellet leicht, daß die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, woran eine grade Anzahl von Decimalstellen hängt, gefunden sey, wenn man die Quadratwurzel aus der Zahl selbst, die Decimalstellen mit als ganze Zahlen betrachtet, gefunden hat, und sodann von der Wurzel rechter Hand halb so viel Decimalstellen abschneidet, als die gegebene Zahl enthält. So ist z. E. $r\,75,255625 = r\frac{7525625}{1000000} = \frac{8675}{1000} = 8,675$.

87 §.

Man kan aus jeder Zahl, woran Decimalbrüche hängen, nach der letzten Regel die Quadratwurzel ausziehen, wenn gleich die Anzahl der Decimalstellen ungrade ist. Denn man darf in solchem Fall nur am Ende noch eine o anhängen, wodurch ihre Größe nicht geändert wird (131 §. R.). So wäre z. E. $r\,8,427$ eigentlich $= r\frac{8427}{1000} = \frac{r\,8427}{r\,1000}$ und da müste man sowohl des Zehlers, als Nenners Quadratwurzel nach dem 85 § suchen, und hierauf jene durch diese dividiren. Weil aber $8,427 = 8,4270 = \frac{84270}{10000}$: so ist $r\,8,427 = \frac{r\,84270}{100}$.

88 §.

Diese Schlüsse dienen zugleich aus einer un-

vollkommenen Quadratzahl die Wurzel durch Näherung, so genau, als man will, zu finden. Man bemerke nemlich die Stelle der Einer mit dem gehörigen Zeichen (,) so erhält man die Freyheit so viele Nullen, als man will, anzuhängen (131 § R.) deren Anzahl, aus der eben angeführten Ursache eine grade Anzahl seyn muß. Für jedes paar Nullen bekömt die Wurzel eine Decimalstelle, daß man also allemahl zum voraus wissen kan, wie viele Nullen man anhängen muß, um die Wurzel, bis auf eine gewisse Decimalstelle richtig zu erhalten. So findet man im nebenstehenden Exempel $\sqrt{2} = 1{,}4142$, wo der Fehler kleiner, als $\frac{1}{10000}$ ist. Denn, eigentlich ist man nun versichert, daß $1{,}4142 < \sqrt{2}$ und $1{,}4143 > \sqrt{2}$ sey.

```
2,|00|00|00|00|00|1,4142
 1
---
 1 00
  2
  96
 ---
   400
   281
 -----
  11900
    282
  11296
 ------
  60400
   2828
  56564
 ------
   3836
```

Diese Näherung kan man in allen Fällen auf ähnliche Art so weit treiben, als man will, auch wenn die gegebene Zahl schon Decimalstellen enthält, wie im 86 und 87 §. Man kan ausser der einen Null, die man im 87 § um eine grade Anzahl von Decimalstellen zu erhalten, beyfügt, noch so viel paar Nul-

Nullen, als man will, anhängen, (welche man, weil es einerley ist, auch dem letzten Rest beyfügen kan.)

So findet man vermöge der beygefügten Berechnung $\sqrt{}\,8{,}427 = 2{,}9029$ rc. Es komt in diesem Exempel zugleich eine kleine Verkürzung vor, die derjenigen ähnlich ist, welche im 66 §. R. bey der Division gebraucht worden, wenn der Divisor

```
8,|4 2|7 0| 2,9029
 4|
--
 4 4 2
   4
 4 4 1|
------
      1 7 0 0 0
        5 8 0
      1 1 6 0 4
    ------------
      5 3 9 6 0 0
        5 8 0 4
      5 2 2 4 4 1
    ------------
      1 7 1 5 9   u. s. w.
```

größer, als der folgende Theil des Dividendi ist. Die zwote Classe nemlich läst zum Rest 1. Hiemit die erste Ziffer der folgenden Classe verbunden giebt 17. Aber der doppelte schon gefundene Theil der Wurzel ist 58, welcher in 17 dividirt, 0 giebt (66 §. R.) Also wird diese 0 der dritte Theil der Wurzel, und man hat die übrige Rechnung nicht nöthig; sondern man kan gleich zur folgenden Classe schreiten, indem man zum Rest 170 noch zwo Nullen setzt.

89 §.

Wenn die Zahl, woraus man die Quadratwurzel ziehen soll, eine Irrationalzahl ist, wie z. E. 1,4142 rc $= \sqrt{}\,2$; so findet man die Wurzel desto richtiger, je mehr Decimaltheile das bekannte Stück der Irrationalzahl enthält, und man kan auf folgende Art untersuchen, in wie viel Ziffern man die Wur-

zel

zel richtig finden werde. Es sey a der bekannte, und x der unbekannte Theil der Irrationalzahl: so wird $\sqrt{a} < \sqrt{(a+x)}$ seyn. Man setze es sey $\sqrt{a}+e = \sqrt{(a+x)}$: so wird $a+2e\sqrt{a}+ee = a+x$ und $(2\sqrt{a}+e)e = x$, also $e \overset{\prime}{=} \frac{x}{2\sqrt{a}+e}$. Daraus erhellet, daß $e < \frac{x}{2\sqrt{a}}$ sey. Nun sey die höchste Ziffer von $\sqrt{a}$ von der Ordnung n; so ist die höchste Ziffer von $2\sqrt{a}$ höchstens von der Ordnung $n+1$. Ferner sey von x die höchste Ziffer von der Ordnung $-m$: so wird von $\frac{x}{2\sqrt{a}}$ die höchste Ziffer entweder auf die Ordnung $-m-n$, oder auch auf die Ordnung $-m-(n+1)$ steigen. Also kan man $\sqrt{a}$ bis auf die Ziffer von dieser Ordnung berechnen, da denn der Fehler keine ganze Einheit der Ordnung $-m-(n+1)$ oder $-m-n$ beträgt. Nimt man z. E. $\sqrt{a} = 1{,}4142+x$: so ist $a = 1{,}4142$; $-m = -5$. Nun giebt die Rechnung $\sqrt{a} = 1{,}1892$ rc. Also ist die höchste Ziffer in $2\sqrt{a}$ von der Ordnung 0, und deswegen die höchste Ziffer in $\frac{x}{2\sqrt{a}}$ von der Ordnung -5. Demnach beträgt der Fehler keine ganze Einheit der Ordnung -4, wenn man in diesem Exempel $\sqrt{1{,}4142}$ für $\sqrt{\sqrt{2}}$ annimt. Wäre demnach $\sqrt{1{,}4142} = 1{,}1892\,\alpha\beta\gamma$ - - - -, wo die griechischen Buchstaben die fehlenden Ziffern bedeuten: so erhellet, daß es nicht nöthig sey, diese fehlenden Ziffern zu berechnen, weil der wahre Werth von $\sqrt{\sqrt{2}}$ höchstens nur in den ersten vier Decimalstellen mit $\sqrt{1{,}4142}$ übereinkomt, und die vierte

Decimal-

Decimalstelle vielleicht schon um 1 zu klein ist. Hätte man $\sqrt{2}$ selbst auf mehr Decimalstellen berechnet; so würde man auf eben die Art auch $\sqrt{\sqrt{2}}$ in mehr Decimalstellen richtig finden.

90 §.

Die Würfel aller einfachen Ziffern erhält man durch die Multiplication ihrer Quadrate in die Wurzel. Es sind folgende:

Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

Wer oft rechnet, behält diese 9 Cubikzahlen leicht, und besinnet sich benöthigten Falls auf die Wurzel; sonst muß man sich dieser kleinen Tafel bedienen.

Uebrigens ist hiebey zu bemerken, daß der Würfel einer einfachen Ziffer nur höchstens aus dreyen Ziffern bestehen könne.

Wenn an einer der einfachen Ziffern Nullen hängen: so bestehet ihr Würfel aus eben den vorigen Ziffern mit dreymahl so viel Nullen (37. 40 §. R.) Also umgekehrt, wenn an einem dieser 9 Würfel eine durch 3 theilbare Anzahl von Nullen hanget: so erhält man die Cubikwurzel einer solchen Zahl, wenn man an die Cubikwurzel der Ziffern, den 3ten Theil der Nullen des Würfels hänget.

91 §.

Soll man von einer ganzen Zahl, die höchstens aus dreyen Ziffern bestehet, aber unter diesen 9 Würfeln nicht vorkomt, die Cubikwurzel suchen: so läst sich diese zwar weder in ganzen, noch in gebrochnen

Zah-

Zahlen genau ausdrücken (49 §). Wenn man aber die Wurzeln der beyden Würfel nimt, zwischen welchen die gegebene Zahl fällt; so hat man zwo Grenzen dieser Wurzel, die nur um 1 unterschieden sind. Z. E. $4 < \sqrt[3]{103}$, $5 > \sqrt[3]{103}$; $9 < \sqrt[3]{839}$, $10 > \sqrt[3]{839}$. Nimt man demnach in solchen Fällen die Wurzel des nechst kleinern vollkommenen Würfels für die Wurzel an: so irret man noch nicht um eine ganze Einheit.

92 §.

Wenn eine Zahl aus zweenen Theilen bestehet; so enthält ihre Cubikzahl folgende Stücke: den Würfel des ersten Theils, das dreyfache Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweeten, das dreyfache Product aus dem ersten Theil in das Quadrat des zweeten, den Würfel des zweeten Theils.

Beweis. Das Quadrat $(a+b)^2$ mit $a+b$ multiplicirt giebt $(a+b)^3$. Durch die würkliche Multiplication findet man $(a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

93 §.

Der Würfel einer Ziffer der ersten Decimalordnung hat zur Rechten drey Nullen (90 §), und weil der Würfel dieser Ziffer höchstens aus dreyen einfachen Ziffern bestehet: so kan die höchste Ziffer des Würfels von einem Zehner nur höchstens bis in die sechste Stelle kommen, und die niedrigste komt in die vierte, (allemahl von der Rechten gegen die Linke gerechnet). Z. E. $90^3 = 729000$.

Das

Das dreyfache Product des Quadrats einer einfachen Ziffer in eine einfache Ziffer bestehet höchstens aus vier Ziffern. Denn 9 ist unter den einfachen Ziffern die gröste, und es ist $3 \times 9^2 \times 9 = 2187$. Wenn demnach diejenige, deren Quadrat im Product vorkomt, ein Zehner ist: so hat das Product höchstens 6 Ziffern; ist aber die andre ein Zehner: so hat das Product höchstens fünf Ziffern.

94 §.

Bestehet eine Zahl aus mehr, als zwo Ziffern: so kan man sie in zweene Theile zerfällen, davon der erste ihre höchste Ziffer, und der zweete die übrigen alle enthält. Z. E. $518 = 500 + 18$. Aber, wenn eine solche Zahl auch nur drey Ziffern hat: so bestehet der Würfel des höchsten Theils wenigstens aus sieben Ziffern. Und überhaupt wird der Würfel einer jeden Ziffer wenigstens aus dreymahl so viel Ziffern weniger zwey bestehen, als die Wurzel enthält.

Wenn demnach eine Zahl aus vier bis sechs Ziffern bestehet: so muß ihre Cubikwurzel aus zwoen, und nicht mehrern Ziffern bestehen (90 §).

95 §.

Theilt man eine Cubikzahl, die aus vier bis sechs Ziffern bestehet, von der Rechten gegen die Linke in Classen, so daß entweder jede drey Ziffern, oder auch die höchste nur eine, oder zwo Ziffern bekomt: so enthält die linke Classe den ganzen Würfel des Zehners der Wurzel, und vielleicht auch etwas von den dreyfachen Producten der Quadrate eines jeden der beyden Theile in den andern. In der rechten

Classe

Classe steckt der ganze Würfel des zweeten Theils, und seine niedrigste Ziffer in der niedrigsten Stelle. Aber des dreyfachen Products, aus dem Quadrat des Zehners in den Einer, niedrigste Ziffer steckt in der höchsten, und des dreyfachen Products, aus dem Zehner in das Quadrat des Einers niedrigste Ziffer steckt in der mittelsten Stelle dieser Classe (93 §).

96 §.

Ob nun gleich in der linken Classe mehr, als der Würfel des Zehners enthalten seyn kan: so wird doch diese linke Classe von keinem größern Zehner einen Würfel enthalten können, als von demjenigen, welcher der erste Theil der Wurzel ist. Wäre die Ziffer des Zehners α, und des Einers β: so wäre die Zahl selbst $\alpha.10+\beta$. Der nechst größere Zehner ist $(\alpha+1)10=\alpha.10+10$. Der Würfel jener Zahl ist $\alpha^3.1000+3\alpha^2.100.\beta.+3\alpha.10.\beta^2+\beta^3$, und der Würfel dieser Zahl ist $\alpha^3.1000+3\alpha^2.100.10.10^2+10^3$. Weil nun allemahl $\beta<10$ ist: so ist der erste Würfel allemahl kleiner als der letztere.

97 §.

Eine ganze Zahl bestehet aus vier bis sechs Ziffern, man soll ihre Cubikwurzel suchen.

Aufl. Wenn man die gegebene Zahl in Classen eintheilt, so daß die rechte Classe drey Ziffern bekomt: so steckt der Würfel des ersten Theils der Wurzel in der linken Classe (95 §). Ist demnach die linke Classe eine vollkommene Cubikzahl aus dem 90 §: so ist ihre Wurzel der höchste Theil der gesuchten Wurzel: widrigenfalls wird doch die Wurzel der

nechst

nechst kleinern vollkomnen Cubikzahl, der höchste Theil der gesuchten Wurzel seyn (96 §). Und wenn man diesen hat: so ist es leicht, den zweeten Theil zu finden, wenn man die Rechnung auf eine ähnliche Art, wie im 77 § bey Ausziehung der Quadratwurzel anstellet. Es sey z. E. die Zahl 103823 gegeben: so schreibe man unter der linken Classe 103 den nechst kleinern Würfel 64 aus dem 89 §. Dieser ist der Würfel des ersten Theils der Wurzel, welcher also im Exempel 4 seyn wird. Man schreibt ihn zur Seite hin, wie bey Ausziehung der Quadratwurzel. Nun subtrahire man den Würfel 64 von der höchsten Classe: so bleibt der Rest 39. Nimt man hiezu die höchste Ziffer 8 der folgenden Classe: so steckt in der Zahl 398 das dreyfache Product aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel in den zweeten. Also triplire man das Quadrat 16 des ersten Theils 4 der Wurzel, und schreibe das Product 48 so unter, daß die niedrigste Ziffer 8 unter der höchsten Ziffer 8 der zwoten Classe zu stehen komt, und dividire nun mit 48 in 398: so muß der Quotient wenigstens nicht kleiner, als der zweete Theil der Wurzel seyn.

103	823	47.
64		
39	823	
48		
336		
588		
343		
39	823	
0		

Man kan den Divisor unterstreichen, um sich bey der folgenden Rechnung, desto weniger zu versehen. Der herausgebrachte Quotient könnte aber wohl größer, als der zweete Theil der Wurzel seyn, weil im Dividendo noch wohl etwas zu dem zweyten dreyfachen Product und zum Würfel des zweeten Theils gehöriges stecken könnte.

Es würde im Exempel zwar 48 in 398 dividirt 8 zum Quotienten geben, allein man darf, wegen der gleich anzuführenden Ursache nicht mehr, als 7 nehmen. Um nemlich zu prüfen, ob der Quotient auch zu groß sey, multiplicirt man das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel in den gefundnen Quotienten, als den zweeten Theil, und schreibt das Product gehörig unter, so daß die niedrigste Ziffer unter der höchsten der zwoten Classe zu stehen komt. Hierunter setzt man das dreyfache Product aus dem ersten Theil in das Quadrat des zweeten Theils, so daß die niedrigste Ziffer desselben um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt wird (95 §). Unter diesem Product setzt man noch den Würfel des zweeten Theils wieder um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt, weil dessen niedrigste Ziffer zu den Einern gehört. Diese drey Theile müssen nun noch in dem Rest 39823 enthalten seyn, der übrig ist, nachdem der Würfel des ersten Theils subtrahirt worden. Deswegen addire man die gedachten drey Theile. Ist nun die Summe größer, als jener Rest: so muß man den für den zweeten Theil der Wurzel angenommenen Quotienten so lange um eins vermindern, bis man die erwehnte Summe subtrahiren kan. Bleibt nichts übrig: so ist die Wurzel nun genau gefunden, wie im Exempel 47. Bleibt ein Rest: so ist die gefundene Wurzel zu klein. Aber die wahre Wurzel ist nun keine ganze Einheit größer, als die gefundene. Also hat man wenigstens zwo Grenzen der gesuchten Wurzel, die nur um 1 unterschieden sind. So findet

```
586|752 | 83
512|
-----
 74752
   192
-----
   576
   216
    27
-----
 59787
-----
 14965
```

findet man im beygefügten Exempel $83 < \sqrt[3]{586752}$, und $84 > \sqrt[3]{586752}$.

98 §.

Wenn an einer Zahl, die übrigens aus so vielen Ziffern, als man will, bestehet, rechter Hand Nullen hängen: so ist ihr Würfel der Würfel der Ziffern mit dreymahl so vielen Nullen (40 §. R.). Dafern also an einer vollkomnen Cubikzahl eine durch 3 theilbare Anzahl von Nullen hängt; so ist ihre Cubikwurzel die Wurzel der Ziffern, mit dem dritten Theil der Nullen. Also ist $\sqrt[3]{103823000000} = 4700$, oder wie man dies verkürzt ausdrückt $\sqrt[3]{103823}^{6} = 47^{2}$ (78 §).

99 §.

Jede vollkommene Cubikzahl bestehet höchstens aus dreymahl so vielen Ziffern, als ihre Wurzel.

Beweis. Es bestehe eine Zahl aus n Ziffern, z. E. 6937 rc: so ist $1 > 6937\text{ rc}^{n}$, also $1 > (6937\text{rc})^{3n}$. Aber 1^{3n} ist die kleinste unter den Zahlen, die $3n+1$ Ziffern haben. Bestünde also $(6937\text{ rc})^{3}$ aus $3n+1$ Ziffern: so wäre entweder $(6937\text{ rc})^{3} = 1^{3n}$ oder $> 1^{3n}$, und in beyden Fällen $(6937\text{ rc})^{3} > (6937\text{rc})^{3}$, welches unmöglich ist (47 §).

100 §.

Theilt man nun eine Zahl, die aus so viel Ziffern, als man will, bestehet, z. E. 432081216 von der

Rechten gegen die Linke in Classen, und giebt jeder Classe drey Ziffern, auf folgende Art: 432|081|216, da dann die höchste Classe auch nur eine, oder zwo Ziffern erhalten kan, wenn die Anzahl der Ziffern nicht durch 3 theilbar ist: so besteht die Cubikwurzel der Zahl aus so vielen Ziffern, als man Classen hat. Denn die Wurzel kan nicht mehr Ziffern haben, weil man sonst mehr (94§), und nicht weniger, weil man sonst weniger Classen hätte (99§).

101 §.

In der höchsten Classe der auf eben die Art eingetheilten Zahl steckt der ganze Würfel von der höchsten Ziffer der Wurzel, und kein Würfel einer größern Ziffer von eben der Ordnung.

Beweis. Die Zahl 43208 rc lasse sich in $n+1$ Classen theilen: so hat die Wurzel $n+1$ Ziffern, und man kan sie, wie die Quadratwurzel im 81§ so ausdrücken: $\alpha^{n}\beta^{n-1}\gamma^{n-2}---\eta = \alpha^{n}+\beta^{n-1}\gamma^{n-2}---\eta$. Nun ist $\left(\alpha^{n}\right)^{3} = \alpha^{3n}$. Also komt α^{3} ganz in die $(n+1)$te Classe, d. i. in die höchste. Aber $1 > \beta^{n-1}\gamma^{n-2}---\eta$. Also $\alpha^{n}+1 > \alpha^{n}+\beta^{n-1}\gamma^{n-2}---\eta$, und $(\alpha^{n}+1)^{3} > (\alpha^{n}\beta^{n-1}\gamma^{n-2}---\eta)^{3}$, oder $(\alpha+1)^{3} > 43208$ rc. Also ist in der gegebenen Zahl kein Würfel von einer Ziffer der Ordnung n enthalten, die größer ist, als α.

102 §.

Wenn nun 432|081|216 die gegebene Zahl ist, die nach dem 100§ eingetheilt, drey Classen giebt:

so

so erhellet aus dem 101 §, daß 343 der Würfel des höchsten Theils der Wurzel, und also dieser höchste Theil der Wurzel selbst, nemlich $\overset{2}{a} = 7$ sey, wenn die Wurzel $= \overset{2}{a}\overset{1}{\beta}\gamma$ gesetzt wird. Wenn man demnach den Würfel 343 subtrahirt: so bleibt der Rest $89|081|216 = 3\overset{4}{a^2} \times \overset{1}{\beta}\gamma + 3\overset{2}{a} \times \overset{1}{(\beta\gamma)^2} + \overset{1}{(\beta\gamma)^3}$, welchen man so ausdrücken kan:

$$89|081|216 = 3\overset{4}{a^2}\overset{1}{\beta} + 3\overset{4}{a^2}\gamma + 3\overset{2}{a}\overset{2}{\beta^2} + 3\overset{2}{a} \times 2\overset{1}{\beta}\gamma + 3\overset{2}{a}\gamma^2 + \overset{3}{\beta^3} + 3\overset{2}{\beta^2}\gamma + 3\beta\gamma + \gamma^3$$

Es erhellet, daß die niedrigste Ziffer von $3\overset{4}{a^2}\overset{1}{\beta}$ in die höchste Stelle, von $3\overset{2}{a}\overset{2}{\beta^2}$ in die mitlere, und von $\overset{3}{\beta^3}$ in die niedrigste Stelle der zwoten Classe komme; das Stück $\overset{3}{\beta^3}$ steckt ganz in dieser Classe: von den andern beyden Stücken könnte noch wohl etwas in dem Rest aus der vorigen Classe stecken. Also wird der zweete Theil der Wurzel hier auf eben die Art, wie im 97 § gefunden.

Man mache das dreyfache Quadrat des ersten Theils, dies wird $= 147$, und dividire damit in 890; man beurtheile eben so, wie im 97 § ob der Quotient auch größer als der zweete Theil der Wurzel sey: so wird die Berechnung zeigen, daß 5 müsse genom-

men werden; da denn, nachdem man die Summe $3\alpha^{4}\beta^{2}+3\alpha^{2}\beta^{2}+\beta^{3}$ gehörig abgezogen, der Rest 10206|216 bleibt.

432	081	216	75
343			
89	081		
147			
735			
525			
125			
78875			
10206		216	

103 §.

Aus dem ersten Theil der Cubikwurzel wird auf diese Art allemahl der zweete gefunden. Wenn die Cubikzahl $n+1$ Classen hat, und α, β, γ rc sind die Theile der Wurzel: so ist α von der Ordnung n, β von der Ordnung $n-1$, u. s. w. Demnach ist allemahl $3\alpha^{2}\beta$ von der Ordnung $3n-1$, $3\alpha\beta^{2}$ von der Ordnung $3n-2$, und β^{3} von der Ordnung $3n-3$. Dieserwegen steckt β^{3} in der nechsthöchsten Classe ganz, $3\alpha\beta^{2}$ hat in der mittelsten, und $3\alpha^{2}\beta$ in der höchsten Stelle dieser Classe seine niedrigste Ziffer.

Man kan sich aber durch eine kleine Ueberlegung nunmehro sehr leicht davon überzeugen, daß auf eben die Art aus den beyden ersten Theilen zusammen der dritte, und überhaupt aus einer jeden Anzahl von Theilen zusammen der nechstfolgende gefunden werden könne. Man setze nun die Summe beyder gefundnen Theile $75 = A$: so würde man nun

$A^3 = \overset{3n}{\alpha^3} + 3\overset{2n\ n-1}{\alpha^2\beta} + 3\overset{n\ 2n-2}{\alpha\beta^2} + \overset{3n-3}{\beta^3} = \overset{n\ n-1}{(\alpha\beta)^3}$ subtrahirt haben.

Wenn nun überhaupt die Wurzel $= \overset{n\ n-1\ n-2\ n-3}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta} \text{---} \eta$ ist, und die gegebene Cubikzahl ist N: so hat man

$N = \overset{n\ n-1\ \ n-2\ n-3}{(\alpha\beta + \gamma\delta} \text{---} \eta)^3 = \overset{n-2\ n-3}{(A + \gamma\ \delta} \text{---} \eta)^3$,

das ist, $N = A^3 + 3A^2 \times \overset{n-2\ n-3}{(\gamma\ \delta} \text{--} \eta) + 3A \overset{n-2\ n-3}{(\gamma\ \delta} \text{--} \eta)^2$

$+ \overset{n-2\ n-3}{(\gamma\ \delta} \text{---} \eta)^3$. Nun gehört A nach dieser ersten Operation zur Ordnung $n-1$. Also ist nach dieser ersten Operation $N = \overset{3n-3}{A^3} + 3\overset{2n-2}{A^2} \times \overset{n-2\ n-3}{(\gamma\ \delta} \text{---} \eta)$

$+ 3A \times \overset{n-1\ \ n-2\ n-3}{(\gamma\ \delta} \text{---} \eta)^2 + \overset{n-2\ n-3}{(\gamma\ \delta} \text{---} \eta)^3$. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem 102 §: so erhellet, daß nun der dritte Theil der Wurzel eben so gefunden werden könne aus $\overset{n\ n-1}{\alpha\ \beta}$, wie dort der zweete Theil aus $\overset{n}{\alpha}$ gefunden worden.

104 §.

Nach m Operationen enthält $Am+1$ Theile der Wurzel, und gehört zur Ordnung $n-m$. Wenn demnach ε der $(m+1)$te Theil der Wurzel ist: so ist nun $A = \overset{n\ n-1\ \ n-m}{\alpha\ \beta} \text{---} \varepsilon$, und $N = \overset{n\ n-1\ \ n-m\ n-m-1}{(\alpha\ \beta} \text{--} \varepsilon + \zeta \text{--} \eta)^3$ oder $N = \overset{n-m\ n-m-1}{(A + \zeta} \text{---} \eta)^3$. Der Kürze wegen sey $n-m=r$: so hat man:

$$N = A^{3r} + 3A^{3r-1}\zeta + 3A^{2r-2}(\vartheta \ldots \varkappa)$$
$$+ 3A^{3r-2}\zeta^2 + \ldots \text{ rc.}$$
$$+ \zeta^{3r-3} + \ldots \text{ rc.}$$

Nun hat man bey der letzten Operation A^{3r} subtrahirt, und ist mit $m+1$ Classen fertig. Also sind noch übrig $n+1-m-1 = n-m = r$ Classen. Eben so viele Theile der Wurzel sind übrig. Wenn man demnach mit der $r$ten Classe von der Rechten gegen die Linke gerechnet, eben so umgehet, wie man bey der ersten Operation mit der $n$ten Classe umgieng: so ergiebt sich der folgende Theil der Wurzel eben so aus der Summe der vorhergehenden, wie der zweete Theil aus dem ersten im 102 § gefunden worden.

105 §.

Eine Zahl bestehet aus so vielen Ziffern, als man will, man soll ihre Cubikwurzel suchen.

Aufl. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, wie im 100 § vorgeschrieben worden.

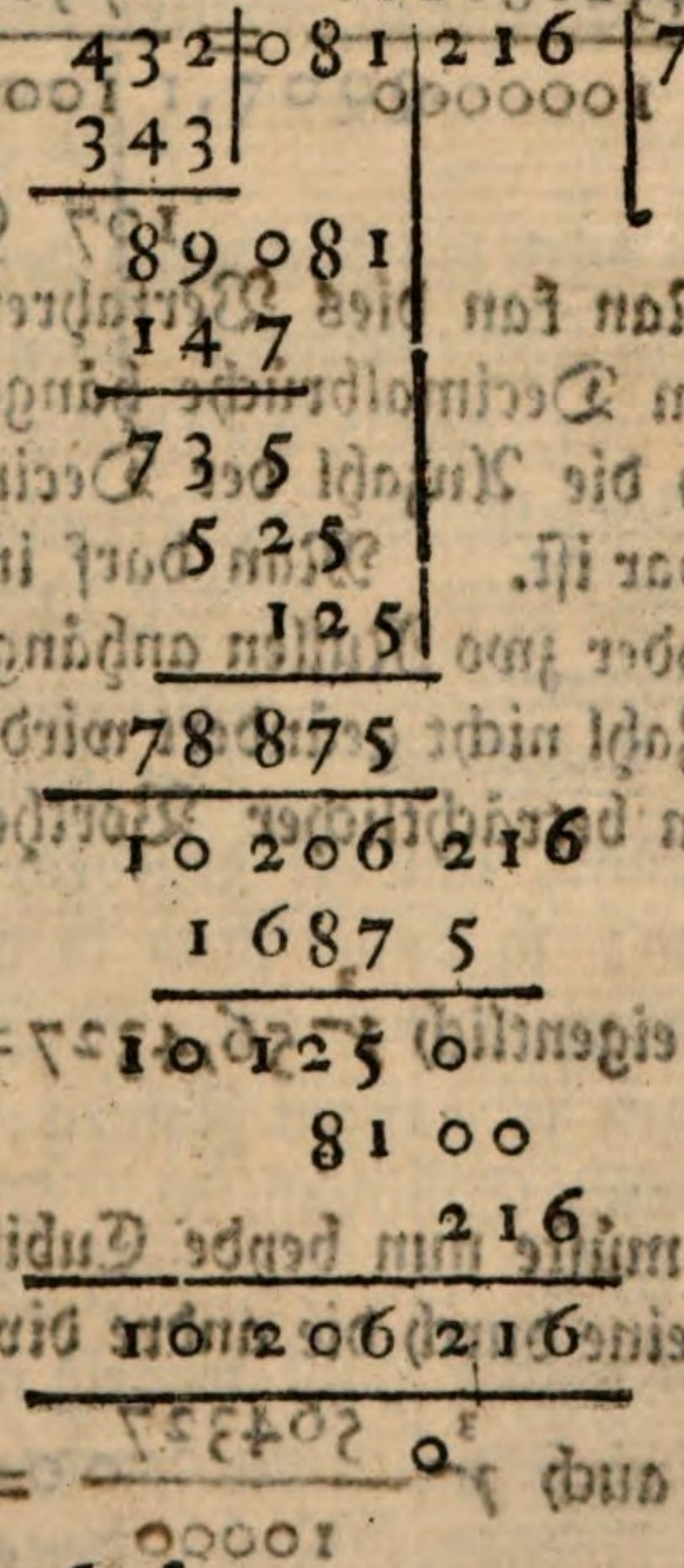
Hierauf suche man aus den beyden ersten Classen die beyden ersten Theile der Wurzel eben so, wie nach dem 97 § die beyden Theile der Wurzel gesucht werden, wenn die Zahl nicht mehr, als 2 Classen hat.

Zum übrigbleibenden Rest nehme man die folgende Classe, und wiederhole dieselbe Arbeit, nur mit dem Unterscheid, daß die Summe der schon gefundenen Theile der Wurzel als ihr erster Theil angesehen wird, dessen Würfel schon subtrahirt worden.

Eben

Eben so muß man mit jeder folgenden Classe umgehen, woraus sich denn allemahl der folgende Theil der Wurzel ergiebt (104 §), bis man auf die letzte Classe komt.

Woferne die gegebene Zahl eine vollkommene Cubikzahl ist: so muß in der letzten Classe nichts übrig bleiben. Bleibt demnach ein Rest: so ist die gefundene Wurzel kleiner, als die wahre, doch ist sie von der wahren Wurzel um keine ganze Einheit unterschieden. Man hat eigentlich in diesem Fall nur ein paar Grenzen der gesuchten Wurzel in ganzen Zahlen, die nur um 1 unterschieden sind. In dem beygefügten Exempel ist der dritte Theil der Wurzel eben so aus den beyden ersten gefunden, wie im 102 § der zweete Theil aus dem ersten. Und weil alles aufgehet: so ist 756 die gesuchte Wurzel.



106 §.

Die Cubikwurzel eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zehler und Nenner die Cubikwurzel aus dem

Zehler und Nenner der Cubikzahl ist (48 §). Von einer Zahl, die aus der 1 mit einer durch 3 theilbaren Anzahl von Nullen bestehet, ist die Cubikwurzel eben die 1 mit dem dritten Theil der Nullen (90 §). Also ist die Cubikwurzel aus einer Zahl, woran eine durch 3 theilbare Anzahl von Decimalstellen hängt, gefunden, wenn man die Cubikwurzel aus der Zahl selbst, die Decimalstellen als ganze Zahlen betrachtet, gefunden hat, und von der Wurzel den dritten Theil so vieler Decimalstellen abschneidet, als die Wurzel enthält. So ist z. E. $\sqrt[3]{432,081216} = \sqrt[3]{\frac{432081216}{1000000}} = \frac{756}{100} = 7,56.$

107 §.

Man kan dies Verfahren bey einer jeden Zahl, woran Decimalbrüche hängen, anbringen, wenn gleich die Anzahl der Decimalstellen nicht durch 3 theilbar ist. Man darf in solchem Fall nur noch eine oder zwo Nullen anhängen, wodurch die Größe der Zahl nicht geändert wird (131 §. R.), und dies ist ein beträchtlicher Vortheil im Rechnen. So wäre eigentlich $\sqrt[3]{56,4327} = \frac{\sqrt[3]{564327}}{\sqrt[3]{10000}}$, und man müste nun beyde Cubikwurzeln suchen, damit man eine durch die andre dividiren könnte. Allein es ist auch $\sqrt[3]{\frac{564327}{10000}} = \sqrt[3]{\frac{56432700}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{56432700}}{100} = \sqrt[3]{56,432700}.$

108 §.

108 §.

Eben dies Hülfsmittel dienet zugleich aus einer unvollkomnen Cubikzahl die Wurzel durch Näherung so genau, als man will, zu finden. Nachdem nemlich die Stelle der Einer mit dem gehörigen Zeichen bemerkt worden: so erhält man die Freyheit, so viele Nullen, als man will, beyzufügen, deren Anzahl aus der obgedachten Ursache durch 3 theilbar seyn muß. Für jede drey Nullen erhält man denn eine Decimalstelle in der Wurzel, und man kan allemahl zum voraus wissen, wie viele Nullen man anhängen muß, um die Wurzel bis auf eine gewisse Decimalstelle richtig zu erhalten.

5,000|000|000|000 | 1,7099.
1
4000
3
21
147
343
3913
87000|000
86700
78300
41310
729
78443829
8556171000
8762443
7885838 7
415287
729
7889992299
666178701 rc.

Ver-

Vermöge der angeführten Berechnung findet man $1{,}7099 < \sqrt[3]{5}$, und $1{,}71 > \sqrt[3]{5}$. Es kan diese Näherung in allen Fällen, so weit man will, getrieben werden, auch wenn die gegebene Zahl schon Decimalstellen enthält, wie im 106. u. 107 §. Auch ausser der einen, oder den zween Nullen, die im 107 § erfordert werden, um eine durch 3 theilbare Anzahl von Decimalstellen zu erhalten, kan man noch so viel mahl drey Nullen, entweder der Zahl selbst, oder den übrigbleibenden Resten beyfügen, als die jedesmahlige Schärfe erfodert, die man bey der Rechnung zu erhalten sucht.

109 §.

Es wird die Rechnung bey Ausziehung der Cubikwurzeln sehr erleichtert, wenn man solche Tafeln zur Hand hat, worin die Quadrat- und Cubikzahlen für die Wurzeln, die aus drey bis vier Ziffern bestehen, berechnet sind: In der Wolfischen Ausgabe der Trigonometrischen Tafeln sind sie bis auf die Wurzel 1000 berechnet. Hat man demnach diese Tafeln zur Hand, und die gegebene Zahl hat nicht über 9 Ziffern: so findet man in diesen Tafeln ohne alle Rechnung entweder die Wurzel selbst, oder doch ihre Grenzen in ganzen Zahlen, dafern die Zahl keine vollkomne Cubikzahl ist. Dafern aber die gegebene Zahl mehr, als 9 Ziffern hat: so kan man gleich, nachdem diese Zahl gehörig in ihre Classen eingetheilt ist, von den Ziffern der drey höchsten Classen den nechst kleinern Würfel, den man in den Tafeln findet, abziehen, und dessen Cubikwurzel für den ersten Theil der gesuchten Wurzel annehmen, und mit der

übri-

übrigen Rechnung wie im 105 § fortfahren; wie im beygefügten Exempel. Man hat in diesen, und ähnlichen Fällen zugleich die Bequemlichkeit, daß man auch das Quadrat des ersten Theils der Wurzel, der hier 524 ist, aus den Tafeln nehmen, und auf solche Art die Mühe, es zu berechnen, ersparen kan.

144125083	907	5243
143877824		
247259 907		
823728		
247118 4		
141 48		
27		
247259 907		
0		

110 §.

Es geht auch an, durch Hülfe solcher Tafeln, die ersten Decimalstellen der irrationalen Wurzeln zu finden, wenn die gegebene Cubikzahl nicht sehr groß ist, und die ganze Zahl, welche den ersten Theil der Wurzel ausmacht, weniger Ziffern hat, als die gröſten Wurzeln der Tafeln. Wollte man z. E. $\sqrt[3]{5}$ auf solche Art finden: so müste man ein paar Cubikzahlen aus den Tafeln nehmen, die durch 1000, oder auch durch 1000000 dividirt, ein paar Grenzen abgeben, zwischen welchen die gegebene Zahl 5 fällt. Dergleichen würden aus den Wolfischen Tafeln die beyden Zahlen 4,913000 und 5,000211 seyn. Da nun $4{,}913000 = (1{,}70)^3$ und $5{,}000211 = (1{,}71)^3$; so erhellet, daß $1{,}70 < \sqrt[3]{5}$ und $1{,}71 > \sqrt[3]{5}$ seyn. Im 108 § ist diese Wurzel genauer gesucht.

111 §.

Nachdem man durch Hülfe der bisher beschriebe-

nen

nen Regeln aus einer gegebenen Zahl die Quadrat- oder Cubikwurzel gefunden hat, ist es nicht undienlich, zu prüfen, ob auch in der Rechnung ein Fehler eingeschlichen sey. Zu dem Ende suche man das Quadrat oder den Würfel der gefundenen Wurzel, vermittelst der Multiplication, und prüfe, ob die gegebene Quadrat- oder Cubikzahl richtig wieder herauskomt. Geschieht dies nicht: so ist gewiß ein Fehler vorgegangen, dafern man richtig multiplicirt hat, und die gegebene Zahl eine vollkommene Quadrat- oder Cubikzahl ist. Hat man aber aus einer unvollkommenen Quadrat- oder Cubikzahl die Wurzel ausgezogen, die man nie ganz erhält: so muß das Quadrat, oder der Würfel von dem gefundenen Theil der Wurzel, wenn dazu der übriggebliebene Rest addirt wird, die gegebene Zahl wieder herstellen. So wird im 88 §.

$1{,}4142^2 = 1{,}99996164$

der übrig gebliebene Rest 3836

Summe 2,00000000

und im 108 §.

$1{,}7099^3 = 4{,}999333821299$

der übrige Rest 666178701

Summe 5,000000000000

112 §.

Man ist jetzt im Stande alle diejenigen Aufgaben vollständig aufzulösen, deren Auflösungen im ersten Theil dieses Lehrbegrifs unvollständig bleiben musten, weil die Methode noch nicht bekannt war, wie man aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel

sucht.

sucht. Es gehören hieher der 192 § der Rechenkunst, nebst dem 283 § der Geometrie. Wenn man nunmehro zur Uebung in der Rechnung sich willkührliche Exempel dieser Aufgaben wählt: so wird dadurch diese an sich etwas trockne Theorie desto angenehmer, weil man sie zugleich auf die Geometrie anwenden lernt. Aehnliche Anwendungen der Regeln, aus einer Zahl die Cubikwurzel auszuziehen, werden in der folgenden weiteren Ausführung der Geometrie vorkommen.

Der V. Abschnitt.

Von den Sexagesimal-Brüchen.

113 §.

Die einzelnen Ziffern verschiedener Ordnungen, wodurch eine auf gewöhnliche Art geschriebene Zahl ausgedrückt wird, sind als einfache Ziffern anzusehen, die in eine Potenz von 10 multiplicirt sind, deren Exponent mit dem Exponenten der Ordnung der Ziffer einerley ist. So ist $374268 = 3.10^5 + 7.10^4 + 4.10^3 + 2.10^2 + 6.10 + 8$. Diese Reihe ist denjenigen völlig ähnlich, welche im 50, und 51 § betrachtet worden. Sie ist nach den Potenzen der 10 geordnet, und die einzelnen Ziffern geben die Coefficienten ab.

Hängen an einer ganzen Zahl Decimalstellen: so sind diese nichts anders, als die Fortsetzung einer ähnlichen Reihe der Potenzen von 10 auf negative

Expo-

Exponenten, und es ist z. E. $543,2687 = 5.10^{2} + 4.10^{1} + 3.10^{0} + 2.10^{-1} + 6.10^{-2} + 8.10^{-3} + 7.10^{-4}$. Die Ziffern also, welche die Decimalbrüche ausmachen, sind als Ziffern negativer Decimalordnungen anzusehen, und der Exponent ihrer Ordnung wird eine verneinte Zahl (78 §). Uebrigens bleibt es noch allgemein richtig, was im 78 § vom Exponenten der Ordnung der niedrigsten Ziffer eines Products oder eines Quotienten zwoer Ziffern verschiedener Ordnungen festgesetzt worden. Man muß aber das Wort Summe oder Rest in dem allgemeinen Verstande des I Abschnitts nehmen, wenn der Unterschied positiver und negativer Decimalordnungen in Betracht komt. So ist $7^{3} \times 6^{-4} = 7.10^{3} \times 6.10^{-4} = 42.10^{-1}$ (68§) $= 4,2 = 42$, und $8^{7} : 2^{-5} = 8.10^{7} : 2.10^{-5} = 4.10^{12}$ u. s. f.

114 §.

Aus dieser Betrachtung liessen sich die Regeln der vier Rechnungsarten für die Decimalbrüche sehr leicht herleiten, wenn sie nicht im VII Abschnitt der Rechenkunst bereits aus andern Gründen erwiesen wären. Und wenn man statt der Ziffer 10 eine andre, z. E. 12 nehmen wollte: so würden sich aus der Natur einer solchen Reihe, die nach den Potenzen von 12 geordnet wäre, völlig ähnliche Rechnungs-Regeln für solche Brüche herleiten lassen, deren Nenner Potenzen der 12 wären, und die man Duodecimalbrüche nennen könnte. So wie bey der Decimal-Abtheilung der Längenmaaße in der Geometrie die Decimalbrüche mit Vortheil gebraucht wurden,

die

die Rechnung zu verkürzen: eben so würden sich die Duodecimalbrüche bey der Duodecimal-Abtheilung mit Vortheil gebrauchen lassen. Weil inzwischen die Duodecimal-Eintheilung bey den Geometern nicht üblich ist: so pfleget man auch für die Duodecimal-Brüche keine besondre Regeln zu geben.

115 §.

Man braucht aber bey Messung der Winkel die Sexagesimal-Eintheilung der Maasse, das ist, man theilt die kleinern Maasse der Winkel allemahl wieder in 60 Theile. Ein Grad hat 60 Minuten, eine Minute 60 Secunden, u. s. f. (267 §. Geom.) Demnach werden die Minuten, Secunden, u. s. f. Sexagesimalbrüche der Grade, das ist, es werden solche Brüche, deren Nenner Potenzen von 60 sind. Man theilt auf eine ähnliche Art im gemeinen Leben bey Abmessung der Zeit, eine Stunde in 60 Minuten, eine Minute in 60 Secunden, u. s. f. Dies ist die Ursache, weswegen man für die vier Rechnungsarten mit den Sexagesimalbrüchen besondre Rechnungs-Regeln vorzutragen pfleget. Man darf auch diese Brüche nur durch eine Reihe ausdrücken, deren Glieder Potenzen negativer Exponenten von 60, und deren Coefficienten die Zehler derselben sind: so ist man keiner besondern Regeln benöthigt, und die ganze Sache beruhet auf demjenigen, was im 69 § vorgeschrieben worden.

116 §.

Nur macht man hier die kleine Veränderung, daß man der Kürze wegen die Potenzen der 60, worin die Zehler der Brüche zu multipliciren sind, nicht

würklich hinsetzt; sondern statt dessen die Zehler der Brüche als Zahlen verschiedener Sexagesimal-Ordnungen ansiehet. Der Exponent ihrer Ordnung ist sodann allemahl einerley mit dem Exponenten der Potenz von 60, deren Coefficienten sie sind. Man setzt diesen Exponenten der Ordnung eben so über die Ziffern, wie bey den Decimalbrüchen. Demnach wird der Ausdruck $50^{\circ}\ 26'\ 31''\ 40'''\ 21^{IV}$ so geschrieben:

$^{0}\ \ ^{-1}\ \ ^{-2}\ \ ^{-3}\ \ ^{-4}$
40 26 31 40 21.

Also ist auch hier der Exponent der Ordnung des Products die Summe der Exponenten der Factoren, und man subtrahirt den Exponenten der Ordnung des Divisors vom Exponenten des Dividendi, um den Exponenten der Ordnung des Quotienten zu finden.

117 §.

Sexagesimal-Brüche zu addiren.

Aufl. Man setze sie so unter einander, daß die Theile von einerley Ordnung in eine Columne kommen. Hierauf addire man zuerst die niedrigste Columne, und dividire durch 60. Der Quotient bleibt in mente, und wird zur nechst höhern Columne gerechnet, der Rest aber unter dieser Columne gesetzt.

Mit der Summe der nechst höhern Columne, nachdem das, was vorher in mente geblieben war, dazu gerechnet worden, verfahre man auf eben die Art, und setze dies Verfahren durch alle Columnen bis zur höchsten fort: so erhält man die ganze Summe:

Exempel.

Exempel.

°	—1	—2	—3	—4	—5
27	18	35	43	08	16
19	03	17	05	37	59
43	54	07	51	14	12
	76	60	100	60	87
	60		60		60
Summe 90	16	00	40	00	27

118 §.

Eine Reihe solcher Sexagesimal-Brüche von einer andern zu subtrahiren.

Aufl. Nachdem die Zahlen wie vorhin unter einander gesetzt sind, mache man mit der Multiplication bey der niedrigsten Columne den Anfang, und gehe von jeder Columne zur nechst höhern fort. Ist das, was man subtrahiren soll, größer als die obenstehende Zahl: so borge man eins aus der nechsthöhern Classe. Hiedurch wird die nechstniedrige um 60 vermehrt. Soll man aus einer Classe borgen, worin die Null steht: so borge man darüber weg; so erhält man in dieser Classe 59 u. s. f.

Exempel.

°	—1 59	—2 59	—3 60	—4 59	—5 60
27	00	00	13	00	33
18	29	17	26	14	43
Rest 8	30	42	46	45	50.

119 §.

Sexagesimalbrüche in einander zu multipliciren.

Aufl. 1 Fall. Wenn das Multiplicandum aus mehrern Theilen bestehet, der Multiplicator aber einfach ist: so multiplicirt man den letztern in jeden Theil des Multiplicandi mit Beobachtung der Regel des 116§ wegen der Exponenten. Man dividirt jedes Product durch 60, und setzt nur den Rest hin, rechnet aber den Quotienten zum Product der nechst höhern Ordnung.

Exempel.

0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
34	16	23	17	08			
				−3			
				25			
		856	409	582	428	200	
		840	360	540	420	180	
Product	14	16	49	42	08	20	

2 Fall. Wenn auch der Multiplicator aus mehrern Theilen zusammengesetzt ist: so multiplicirt man nach einander das ganze Multiplicandum mit einem jeden Theil des Multiplicators, setzt diese Producte gehörig unter einander, und bringet sie hierauf in eine Summe.

Exempel.

0	−1	−2	−3	−4
14	17	32		
0	−1	−2		
8	07	12		
	02	51	30	24
01	40	2	44	
114	20	16		
Prod. 116	03	10	14	24

Das

Das mühsamste bey dieser Rechnung besteht darin, nachdem die Producte der einzelnen Theile gefunden sind, durch die Division zu erfahren, wieviel man zur nechst höhern Classe rechnen muß, und wie viel der Rest ausmacht, welcher in der Classe bleibt, die der Exponent der Ordnung des Products ausdrückt. Wer viel mit solchen Zahlen zu rechnen hat, würde am besten thun, sich ein für allemahl alle Producte zu suchen, die ein paar Factoren geben können, wovon keiner größer, als 59 ist. Diese Producte könnte man denn gleich mit 60 dividiren, und den Quotienten nebst dem Rest hinsetzen. Wenn man dies in eine Tabelle brächte: so könnte man aus derselben die Producte nur gleich ausschreiben. Eine solche Tabelle hat man würklich berechnet, sie ist dem Pythagorischen Rechentisch (36 §. R.) in allem ähnlich Die Producte sind durch die Quotienten und übrig bleibende Reste, welche die Division mit 60 giebt, ausgedrückt auf folgende Art: $32 \times 12 = 06\ 24$, wo 06 der Quotient, und 24 der Rest ist. Eben so ist $12 \times 17 = 03\ 24$; $34 \times 25 = 14\ 10$. Man findet die Tafel in Hausens Elementis Matheseos 77-82 S., und bey andern Schriftstellern mehr, vornemlich solchen, welche zu astronomischen Rechnungen Anweisung geben.

120 §.

Sexagesimal-Brüche in einander zu dividiren.

Aufl. 1 Fall. Wenn der Divisor einfach ist, dividire man jeden Theil des Dividendi mit demselben, indem man mit dem höchsten anfängt, und nach und nach zu den folgenden fortgehet. Was bey jeder

Division übrig bleibt, rechne man zum folgenden Theil des Dividendi. Geht einmahl alles auf: so hat man den ganzen Quotienten, wo nicht: so muß man entweder zu dem letzten Theil des Quotienten, wie gewöhnlich, einen Bruch setzen; oder man kan auch den letzten Rest wieder mit einer um 1 niedrigern Potenz von 60 multipliciren, und auf solche Art die Division, so weit man will, fortsetzen.

Exempel.

0	-1	-2	-3	2 1 0 -1
34	16	27	05	2 2 6 5 3 2 1 $\frac{11}{14}$
-2	360	720	300	
14	376	747	305	
28	14	14	14	
6	28	70	28	
-1	96	47	25	
60	14	14	14	
-1	84	42	11	
360	12	5		
	-2	-3		
	60	60		
	-2	-3		
	720	300		

2 Fall. Wenn auch der Divisor aus mehrern Theilen bestehet: so dividirt man des Dividendi höchsten Theil durch des Divisors höchsten Theil, dafern jener nicht kleiner als dieser ist, denn widrigenfalls muß man die beyden höchsten Theile des Dividendi zusammen nehmen. Hierauf multiplicirt man den gefundenen Quotienten in den ganzen Divisor, und zieht das Product vom Dividendo ab.

Wenn

Wenn man mit dem Rest allemahl dasselbe Verfahren wiederholt: so bekomt man die Theile des Quotienten nach einander. Wenn zuletzt nicht alles aufgehet: so kan man man auch diese Division so weit man will, treiben, und den Quotienten so nahe, als man es nöthig erachtet, durch Sexagesimal-Brüche ausdrücken.

Exempel.

0	-1	-2	-3	-4	0	-1	-2
116	3	10	14	24	8	7	12
	0	-1	-2				
	14	17	32				
	114	20	16				
		1	42	54	14		
			14	17	32		
		1	40	2	44		
			2	51	30	24	
				14	17	32	
			2	51	30	24	
					0		

Wenn man die Tafel der sechzigtheiligen Producte zur Hand hat: so erleichtert dies die Division ungemein. Man kan sie bey diesem Geschäfte eben so gebrauchen, wie den pythagorischen Rechentisch bey der Division der Decimal-Ziffern, welches für sich leicht in die Augen fällt.

121 §.

Hätte man für die ersten 59 Zahlen einfache Ziffern, so wie man sie für die ersten 9 Zahlen hat, und legte man sodann jede Ziffer in der nechstfolgenden linken Classe einen 60 mahl größern Werth bey, als

in der vorhergehenden: so liessen sich alle Zahlen durch diese Ziffern auf eine ähnliche Art ausdrücken, wie es jetzt durch Hülfe der bekannten 9 Ziffern gewöhnlich ist. Alle Regeln der Rechenkunst würden in der Hauptsache dieselben bleiben. Die Tafel der sechzigtheiligen Producte würde das Ein mahl eins werden, man würde darin 3481 Producte nöthig haben; statt dessen, daß bey der dekadischen Rechenkunst nur 81 nöthig sind. In dieser Rechenkunst würden die Sexagesimalbrüche das seyn, was in der dekadischen die Decimalbrüche sind, und die Rechnung damit würde an völlig einerley Regeln gebunden seyn.

122 §.

Die Sache selbst ist so allgemein, daß man auf diese Betrachtung unzehlig viele verschiedene Arten die Zahlen zu bezeichnen gründen kan, nachdem man mehr oder weniger einfache Ziffern gebrauchen will. Der allgemeinste Ausdruck einer jeden Zahl ist $ax^m + bx^{m-1} - - - ex + f + gx^{-1} + hx^2 - - kx^{-n}$. In der gewöhnlichen Dekadik ist $x = 10$, und keiner der Coefficienten gröſser, als 9, wobey zu merken ist, daß auch Coefficienten $= 0$ seyn können. Die Voraussetzung $x = 2$ giebt die von Leibnitzen angegebene Diadik, da denn jeder Coefficient entweder $= 1$, oder $= 0$ ist. Die Voraussetzung $x = 4$ giebt die Weigelsche Tetraktik, und die Coefficienten werden nie gröſser, als 3. Eben so könnte man unsre 24 Buchstaben nach der Ordnung die ersten 24 Zahlen bedeuten lassen, und $x = 25$ setzen. Alle diese Untersuchungen sind an sich artig, und dienen dazu, die Lehren der Rechenkunst in ihrer völligen Allgemeinheit zu übersehen. Uebrigens aber würde es

von

von keinem Nutzen seyn, die Sache weiter zu treiben, und wohl gar einer andern Characteristik unsre einmahl eingeführte Dekadik nachzusetzen; da doch diese ihre grosse Bequemlichkeiten hat, und mit den Zahlwörtern, die man fast in allen Sprachen hat, so sehr wohl überein komt. Die alten Chineser sollen die Diadik gebraucht haben, wie Leibniz aus einem alten Manuscript, so man dem Fohi zuschreibt geschlossen hat, und eine Stelle im Plutarch veranlaste Weigeln, dafür zu halten, daß die alten Thracier die Tetractik gebraucht haben.

Der VI. Abschnitt.

Von der Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse als dem Ursprung der Logarithmen.

123 §.

Wenn die einzelnen Verhältnisse, woraus ein anderes, wie A:F im 220 §. R. zusammengesetzt ist, alle gleich groß sind: so heist A:F überhaupt ein vervielfachtes Verhältniß (ratio multiplicata) eines jeden der einzelnen gleichen Verhältnisse, woraus es zusammengesetzt ist. Jedes der einzelnen Verhältnisse heist sodann eine ratio submultiplicata des ganzen A:F. Diese vervielfachten Verhältnisse bekommen den Nahmen von der Anzahl der gleichen Theile, woraus sie zusammengesetzt sind. Hätte man

$A:B = m:n$
$B:C = m:n$
$C:D = m:n$
$D:E = m:n$
$E:F = m:n$ u. s. f.

so heist A:E die ratio quadruplicata, A:F die ratio quintaplicata von $m:n$ u. s. f. Umgekehrt also ist $m:n$, oder A:B die ratio subquadruplicata von A:E, die ratio subquintuplicata von A:F u. s. f. Diese gleichen Verhältnisse sind also in Ansehung des ganzen Verhältnisses eben das, was die aliquoten Theile einer Größe gegen die ganze Größe sind.

Im 234 und 240 §. G. sind bereits ähnliche Nahmen gebraucht worden, wenn das ganze Verhältniß nur aus zwoen, oder dreyen gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist.

Uebrigens ist hiebey noch anzumerken, daß der Satz des 221 § der Rechenkunst ganz allgemein richtig sey, wenn gleich die Glieder der Verhältnisse keine Zahlen; sondern Linien, oder andre Größen sind, weil die Gründe, woraus dieser Satz folget, im 199 §. G. in dieser Allgemeinheit bewiesen sind.

124 §.

Verhältnisse, die man aus einer gleichen Anzahl gleicher Verhältnisse zusammensetzt, sind gleich groß.

Wenn aber ein Verhältniß $B:F$ zwar aus eben den gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist, woraus ein andres $A:D$ bestehet, überdem aber noch aus mehrern eben so großen Verhältnissen: so ist $B:F$ in $= A:D$.

Beweis.

Beweis. Es sey $A:D = \left\{\begin{matrix}\alpha:\beta\\ \gamma:\delta\\ \varepsilon:\zeta\\ \text{rc.}\end{matrix}\right\}$ und $B:E = \left\{\begin{matrix}a:b\\ c:d\\ e:f\\ \text{rc.}\end{matrix}\right\}$ überdem aber $\alpha:\beta = a:b$, $\gamma:\delta = c:d$, $\varepsilon:\zeta = e:f$ rc: so hat man: $\alpha.\gamma.\varepsilon:\beta\,\delta\,\zeta = a.c.e:b.d.f.$ (174 §. R.) $A:D = \alpha.\gamma.\varepsilon:\beta.\delta.\zeta$, und $B:E = a.c.e:b.d.f.$ (221 §. R.). Also $A:D = B:E$.

Wenn zu den Theilen, die das Verhältniß B:E ausmachen, nur noch ein neues $g:h$ hinzu käme, so daß B:F aus den Theilen des Verhältnisses B:E, und überdem noch aus $g:h$ zusammengesetzt wäre: so würde $B:F > B:E$ und also auch $B:F > A:D$ seyn.

125 §.

Das Verhältniß zwoer Potenzen der Ordnung n ist n mahl größer, als das Verhältniß ihrer Wurzeln.

Beweis. Es ist $A^n:B^n$ so viel als A.A.A...: B.B.B..., und zwar so, daß jeder Factor in diesen Producten so oft stehet, als die ganze Zahl n die Einheit enthält (44 §). Also ist das Verhältniß der Producte $A^n:B^n$ aus dem Verhältniß A:B n mahl genommen, zusammengesetzt (123 §).

Demnach ist umgekehrt das Verhältniß zwoer Wurzeln der Ordnung n wie $\sqrt[n]{A}:\sqrt[n]{B}$, $\frac{1}{n}$tel des Verhältnisses A:B.

Das Verhältniß zwoer gleichnahmichten Bruchpotenzen ist gegen das Verhältniß der Wurzeln so groß,

groß, als der gebrochne Exponent gegen 1. Denn es ist $A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[n]{A^m} : \sqrt[n]{B^m} = \frac{1}{n}(A^m : B^m) =$ $\frac{1}{n} . m . (A:B) = \frac{m}{n}(A:B)$.

126 §.

Es ist in einer geometrischen Progreßion das erste und letzte Glied gegeben, nebst der Anzahl der Glieder, die nach dem ersten folgen sollen: man soll das zweyte Glied finden.

Aufl. Wenn A das erste Glied ist, und m der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten: so ist die Progreßion diese $A, mA, m^2A, m^3A, m^4A, m^5A$, u. s. f. (179 §. R.). Wenn demnach n Glieder nach dem ersten folgen: so ist das letzte Glied $= m^nA$.

Man setze also das letzte Glied $m^nA = V$: so hat man $m^nA \times A^{n-1} = A^{n-1}V = m^nA^n$, und $\sqrt[n]{A^{n-1}V} = mA =$ dem zweyten Gliede.

∴ Dies giebt die Regel: Man multiplicire das letzte Glied in die Potenz der Ordnung $n-1$ des ersten, und ziehe aus dem Product die Wurzel der Ordnung n: so ist diese das gesuchte zweyte Glied.

Wie diese Wurzeln in Zahlen gefunden werde, läst sich hier noch nicht zeigen.

Weil $m^n = \frac{V}{A}$, also $m = \sqrt[n]{\frac{V}{A}}$ und $mA = A\sqrt[n]{\frac{V}{A}}$: so wird auch das Product des ersten Gliedes in die Wurzel der Ordnung n aus dem Quotienten

tienten

Renten des letzten Gliedes durch das erste dividirt, die gesuchte zwote Zahl seyn.

127 §.

Wenn eine geometrische Progreßion aus $n+1$ Gliedern bestehet: so ist das Verhältniß des letzten Gliedes zum ersten n mahl so groß, als das Verhältniß des zweyten Gliedes zum ersten.

Beweis. Es sey A, B, C, D . . . V die Progreßion: so ist $B = rA^{n-1}V$, also $B^n = A^{n-1}V$, und $\frac{B^n}{A^n} = \frac{V}{A}$, folglich $V:A = B^n:A^n$, d. i. V:A ist das Verhältniß B:A n mahl genommen (125).

128 §.

Man zehle nun die Glieder, welche in einer geometrischen Progreßion nach dem ersten folgen, etwa auf diese Art:

$$\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{D}, \overset{5}{E}, \overset{6}{F}, \overset{7}{G}, \overset{8}{H}, \overset{9}{I}, \overset{10}{K}, L, \text{ u. s. w.}$$

und sehe ein Verhältniß F:A als das ganze an: so wird man die Größe des Verhältnisses eines jeden andern Gliedes der Progreßion zum ersten Gliede, gegen das Verhältniß F:A durch eine Zahl ausdrücken können, die gegen eins eben so groß ist. Es ist nemlich $B:A = \frac{1}{5}(F:A)$, $C:A = \frac{2}{5}(F:A)$, $D:A = \frac{3}{5}(F:A)$, $E:A = \frac{4}{5}(F:A)$, $G:A = \frac{6}{5}(F:A)$, $H:A = \frac{7}{5}(F:A)$, $I:A = \frac{8}{5}(F:A)$, $K:A = \frac{9}{5}(F:A)$, $L:A = \frac{10}{5}(F:A) = 2(F:A)$ u. s. f. Hiebey ist aber die Erinnerung des 237 § der Geometrie zu wiederholen. Die Ausdrücke B:A, C:A, u. s. f. bedeuten hier keine Quotienten; sondern blos Verhältnisse,

und

und man weiß, daß diese mit den Quotienten nicht in aller Absicht einerley sind.

129 §.

Es verhält sich mit dieser Sache nun eben so, wie mit allen andern Messungen. Jedes Maaß ist an sich willkührlich, und es muß die Größe desselben ein für allemahl bestimt seyn. Frägt man, wie lang eine gewisse Linie sey: so kan man nicht antworten, wofern man nicht ausdrückt, wie viele Fusse, Ruthen, Meilen, u. s. f. diese Länge ausmachen, und dann muß vorher ausgemacht seyn, wie lang das gebrauchte Maaß, z. E. ein Fuß, eine Ruthe, eine Meile, u. dgl. seyn soll. Dann aber kan man die Länge entweder in ganzen Fußen, Ruthen, Meilen, u. s. f. oder nur in aliquoten Theilen des gebrauchten Maaßes ausdrücken. Ist demnach die Frage: Wie groß ein Verhältniß sey? so kan man nicht antworten, wofern nicht ein für allemahl ein gewisses Verhältniß, als das Maaß aller übrigen angenommen wird. Ist ein solches Verhältniß festgesetzt: so kan man die Größe eines jeden andern Verhältnisses durch jenes Verhältniß ausdrücken, wenn dies zum Maaß aller übrigen angenommene Verhältniß entweder ganz, oder doch ein aliquoter Theil desselben, in dem andern etliche mahl enthalten ist.

130 §.

Die Zahl, welche die Größe eines Verhältnisses, z. E. D:A gegen das, zum Maaß aller übrigen angenommene Verhältniß ausdrückt, heist der **Logarithme** des Verhältnisses D:A (αριθμὸς λόγων), und das zum Maaß aller übrigen angenommene Verhältniß wird hier das **einfache Verhältniß** genant,

nant, weil es bey diesem Geschäfte eben das ist, was die Einheit bey Ausmessung einzelner Größen war. Wenn im 128 § F:A das einfache Verhältniß ist: so ist $\frac{2}{5}$ der Logarithme des Verhältnisses K:A, 2 der Logarithme des Verhältnisses L:A. Der Kürze wegen soll der Buchstab *l* in der Folge allemahl den Logarithmen desjenigen Verhältnisses bedeuten, dem er vorangesetzt ist, da man denn wegen mehrerer Deutlichkeit, das Verhältniß in eine Parenthese einschliest. So wird $\frac{3}{5} = l(D:A)$, $\frac{2}{5} = l(K:A)$, $2 = l(L:A)$, u. s. f. wenn F:A das einfache Verhältniß ist, und in dieser Voraussetzung ist $l(F:A) = 1$.

131 §.

Man kan jedes Verhältniß so ausdrücken, daß eins von beyden Gliedern = 1 wird, wenn man nemlich mit demjenigen Gliede dividirt, statt dessen man die Einheit haben will. So ist z. E. $D:A = \frac{D}{A} : 1$ (199 §. G.). Weil dies die Größe des Verhältnisses nicht ändert: so ändert es auch den Logarithmen desselben nicht. Es bleibt $l\left(\frac{D}{A} : 1\right) = l(D:A)$ vorausgesetzt, daß $F:A = \frac{F}{A} : 1$ das einfache Verhältniß bleibe. Man kan nemlich auch alle Glieder einer geometrischen Progreßion mit dem ersten Gliede dividiren, ohne daß solches die Verhältnisse der Glieder gegen einander, ändert. Man würde im 128 § diese Progreßion erhalten.

$$1 \quad \frac{B}{A}^{1} \quad \frac{C}{A}^{2} \quad \frac{D}{A}^{3} \quad \frac{E}{A}^{4} \quad \frac{F}{A}^{5} \quad \frac{G}{A}^{6} \quad \frac{H}{A}^{7}$$

u. s. f. wenn F:A

=

$= \frac{F}{A} : 1$ das einfache Verhältniß bleibt: so bleibt $\frac{3}{5} = l\left(\frac{D}{A} : 1\right)$, $\frac{7}{5} = \left(\frac{H}{A} : 1\right)$ u. s. f.

Man kan also ein für allemahl annehmen, die geometrische Progreßion solle von 1 anfangen, und dann das Verhältniß eines gewissen Gliedes zur Einheit für das einfache annehmen: so wird dadurch die Größe der Logarithmen der Verhältnisse aller übrigen Glieder zur Einheit bestimt. Man nehme z. E. folgende Progreßion in Zahlen.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 u. s. f.

und es sey 32 : 1 das einfache Verhältniß: so hat man $\frac{1}{5} = l(2 : 1)$, $\frac{3}{5} = l(8 : 1)$, $\frac{7}{5} = l(128 : 1)$, u. s. f.

Der Logarithme des Verhältnisses einer Zahl zur Einheit heist auch der Kürze wegen der **Logarithme dieser Zahl.** So ist der Logarithme von 8 nichts anders, als der Logarithme des Verhältnisses 8 : 1. Also werden in der Folge die Ausdrücke $l\,8$, und $l(8 : 1)$, oder überhaupt $l\,N$, und $l(N : 1)$ gleichgültig seyn.

132 §.

Wenn die Zahl fest gesetzt ist, deren Logarithme $= 1$ seyn soll: so ist das einfache Verhältniß als das Maaß aller übrigen festgesetzt, und so sind zugleich die Logarithmen aller übrigen Zahlen bestimt. Und wenn man den Logarithmen einer andern Zahl, als vorhin, $= 1$ setzt: so ändert man dadurch zugleich die Logarithmen aller übrigen Zahlen. Im vor. § wird $l\,32 = 1$ gesetzt; also war $l\,2 = \frac{1}{5}$, $l\,4 = \frac{2}{5}$, u. s. f. Wenn man aber $l\,128 = 1$ setzt: so wird $l\,2 = \frac{1}{7}$, $l\,4 = \frac{2}{7}$

=

$l4 = \frac{2}{7}$ u. s. f. Jede Reihe von Logarithmen mit ihren zugehörigen Zahlen, die aus einem angenommenen einfachen Verhältniß ihren Ursprung hat, heist ein Logarithmisches System, und die Zahl, deren Logarithme $= 1$ gesetzt ist, deren Verhältniß zur Einheit also das einfache ist, heist die *basis*, oder das Fundament des Systems, und ihr Verhältniß zur Einheit könte man das Fundamental-Verhältniß des Systems nennen. Demnach giebt es unzählig viele verschiedene Logarithmische Systeme, weil es ganz willkührlich ist, welche Zahl die basis des Systems seyn soll.

133 §.

Wenn in einerley Logarithmen-System zwey Verhältnisse gleiche Logarithmen haben: so sind die Verhältnisse gleich groß.

Sind aber die Logarithmen ungleich: so sind auch die Verhältnisse ungleich.

Beweis. Es sey $b:1$ das einfache Verhältniß, und $\frac{n}{m}$ der Logarithme der Verhältnisse $B:A$, und $D:C$, oder $\frac{B}{A}:1$, und $\frac{D}{C}:1$: so ist jedes dieser Verhältnisse $= \frac{n}{m}(b:1)$ (130 §) das heist, jedes dieser Verhältnisse ist aus dem Verhältniß $\frac{1}{m}(b:1)$ immahl genommen zusammengesetzt. Also ist $\frac{B}{A}:1 = \frac{D}{C}:1$ (124 §) oder $B:A = D:C$.

Wäre aber $l\left(\frac{B}{A}:1\right)=\frac{r}{m}$ und $l\left(\frac{D}{C}:1\right)=\frac{n}{m}$; so wäre $\frac{B}{A}:1=\sqrt[m]{(b:1)^r}$ und $\frac{D}{C}=\sqrt[m]{(b:1)^n}$. Demnach wäre jenes Verhältniß aus $\frac{1}{m}(b:1)$ rmahl, und dieses aus eben dem Verhältnisse nmahl genommen zusammengesetzt. Also muß $\frac{B}{A}:1$ in $=\frac{D}{C}:1$, oder $B:A$ in $=D:C$ seyn (124 §).

134 §.

Hieraus folgt umgekehrt, wenn zwey Verhältnisse gleich sind; so müssen sie in einerley System auch gleiche Logarithmen haben. Denn wären ihre Logarithmen ungleich: so wären die Verhältnisse selbst ungleich (133 §) wider die Voraussetzung.

In einerley Logarithmen-System gehören also gleiche Zahlen zu gleichen Logarithmen, und umgekehrt, zu gleichen Logarithmen gleiche Zahlen.

135 §.

Sobald also die basis eines Logarithmen-Systems bestimt ist, oder, welches einerley ist, sobald man die Zahl festgesetzt hat, deren Logarithme $=1$ seyn soll, sobald ist das ganze System bestimt, und jede Zahl hat ihren bestimten Logarithmen, keinen andern. Ob man aber die basin des Systems bestimt,

oder den Logarithmen irgend einer andern Zahl, oder eines Verhältnisses beliebig nimt, dies ist wiederum beydes einerley. Denn sobald der Logarithme irgend einer Zahl bestimt ist, sobald ist zugleich die basis des Systems bestimt. Soll z. E. $l256=\frac{8}{5}$ d. i. $l(256:1)=\frac{8}{5}$ seyn: so muß der Logarithme desjenigen Verhältnisses $=\frac{5}{5}=1$ seyn, welches 5 solcher Theile enthält, deren 8 das Verhältniß 256:1 ausmachen. Es sey b die basis des Systems: so ist $256:1=\frac{8}{5}(b:1)$, also $\sqrt[8]{256:1}=\frac{1}{5}(b:1)$ (125 §). In diesem leichten Exempel findet man bald, daß $\sqrt[8]{256}=2$ sey, also hat man $2:1=\frac{1}{5}(b:1)$, und $32:1=b:1$, oder $b=32$.

136 §.

Wenn man ein Verhältniß aus zweyen andern zusammensetzt: so ist der Logarithme des zusammengesetzten Verhältnisses die Summe der Logarithmen jener Verhältnisse, woraus man es zusammensetzt, nemlich in einerley System, dessen *basis* $=b$ ist.

Beweis. Es sey $l(B:1)=\frac{n}{m}$, und $l(C:1)=\frac{r}{m}$: so ist $B:1=\frac{n}{m}(b:1)$ und $C:1=\frac{r}{m}(b:1)$, also $B\times C:1=\frac{n+r}{m}(b:1)$, das heist, das Verhältniß, was man aus den vorigen beyden zusammengesetzt, muß das Verhältniß $\frac{1}{m}(b:1)$ so oft enthalten, als es in jenen beyden zusammen enthal-

ten war. Demnach ist $l(B \times C : 1) = \frac{n+r}{m}$ (130 §) $= l(B:1) + l(C:1)$.

Also ist der Logarithme eines Products zwoer Zahlen die Summe der Logarithmen der Factoren.

137 §.

Der vorige Satz gilt auch für mehr als zwey Verhältnisse. Wenn überhaupt ein Verhältniß, aus so vielen andern, wie man will, zusammengesetzt wird: so ist der Logarithme des zusammengesetzten Verhältnisses die Summe der Logarithmen der einzelnen Verhältnisse. Denn so ist $l(B \times C \times D : 1) = l(B \times C : 1) + l(D : 1) = l(B:1) + l(C:1) + l(D:1)$ (136 §). So kan man von ieder Anzahl der einzelnen Verhältnisse auf die nechstfolgende schliessen.

Also ist auch überhaupt der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren, es mögen ihrer so viele seyn, als da wollen.

138 §.

Den Logarithmen eines Quotienten erhält man, wenn man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendi subtrahirt, wenn, wie hier noch vorausgesetzt wird, das Dividendum grösser, als der Divisor ist.

Beweis. Es sey $l\frac{B}{A} = \lambda$, $lB = L$, $lA = l$: so ist $\frac{B}{A} \times A = B$, also $\lambda + l = L$ (136 §), und $\lambda = L - l$, d. i. $l\frac{B}{A} = lB - lA$.

Also

Also findet man den Logarithmen eines uneigentlichen Bruchs, wenn man vom Logarithmen des Zehlers den Logarithmen des Menners subtrahirt.

Eine andere Folge des erwiesenen Satzes ist diese, daß in jedem System $l1 = 0$ sey. Denn es ist $1 = \frac{A}{A}$, was man auch stat A für eine Zahl setzt. Also $l1 = lA - lA = 0$, weil in jedem System $lA = lA$ ist. Daß dies vermöge des im 130 und 131 § festgesetzten Begrifs eines Logarithmen, nicht anders seyn könne, siehet man leicht, wenn man folgendes erwägen will.

Es ist $l1$ und $l(1:1)$ oder auch überhaupt $l(A:A)$ einerley. Wenn aber $\lambda = l(X:A)$ und $X > A$ ist: so erhellet, daß λ wachse, wenn X grösser wird, und abnehme, wenn X abnimt. Je weniger X von A unterschieden ist, desto kleiner muß λ seyn, und man siehet leicht, wenn $X = A$ ist, daß nun das Verhältniß $X:A$ gar keine Grösse mehr habe, und also $\lambda = 0$ seyn müsse, weil λ die Grösse dieses Verhältnisses ausdrückt.

Es scheinet dies von der gewöhnlichen Lehre abzuweichen, denn man findet in vielen Lehrbüchern behauptet, daß es willkührlich sey, wie groß man den Logarithmen von 1 annehmen wolle. Allein dies rühret daher, weil man sich den Ursprung der Logarithmen gemeiniglich etwas anders vorstellet, als die Sache hier vorgetragen ist, welches bald weiter erhellen wird.

139 §.

Der Logarithmus des Quadrats ist doppelt so groß, als der Logarithme der Wurzel, der Logarith-

me des Würfels dreymahl und überhaupt der Logarithme einer Potenz der Ordnung n ist $n$mahl grösser, als der Logarithme der Wurzel. (136. 137 §)

Umgekehrt also ist der Logarithme der Quadrat-Wurzel die Hälfte vom Logarithmen des Quadrats, der Logarithme der Cubicwurzel der dritte Theil vom Logarithmen des Würfels, und überhaupt der Logarithme der Wurzel der Ordnung n ist $\frac{1}{n}$tel vom Logarithmen der Potenz. Wenn nemlich $lA^n = nlA$: so ist $lA = \frac{1}{n} lA^n$. Ist also $A^n = B$: so hat man $A = \sqrt[n]{B}$, folglich $l\sqrt[n]{B} = \frac{1}{n} lB$.

Der Logarithme einer Bruch-Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. Denn es ist $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (59 §). Also $la^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} la^m$; aber $la^m = mla$, also $la^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} mla = \frac{m}{n} la$.

140 §.

Den Logarithmen eines eigentlichen Bruchs zu finden.

Aufl. Der Logarithme des Bruchs $\frac{2}{3}$ ist eigentlich $= l(\frac{2}{3} : 1) = l(2 : 3)$. Wenn nun b die basis des Systems, und $b > 1$ ist: so kan das Verhältniß $\frac{2}{3} : 1$ aus dem Fundamental-Verhältniß $b : 1$ durch

die

die Zusammensetzung und Theilung gar nicht entstehen. Denn es sey $\frac{2}{3}:1=\frac{m}{n}(b:1)$: so ist dies eben so viel, als $\frac{2}{3}:1=b^{\frac{m}{n}}:1$ (125 §). Aber $b^{\frac{m}{n}}$ ist allemahl grösser, als 1, also auch $b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}$ allemahl grösser, als 1 (48 §). Dieserwegen kan $\frac{2}{3}:1$ nie $=\frac{m}{n}(b:1)$ werden, was auch m und n für ganze Zahlen bedeuten, wohl aber könnte $1:\frac{2}{3}=\frac{m}{n}(b:1)$ werden, und dann wäre $l\left(\frac{1}{\frac{2}{3}}:1\right)=l\frac{3}{2}:1=\frac{m}{n}$. Nun ist das Verhältniß $\frac{3}{2}:1$ dem andern $\frac{2}{3}:1$ zwar für sich gleich, aber auf entgegengesetzte Art. In jenem ist das vorhergehende Glied grösser, in diesem kleiner, als das nachfolgende. Dort ist das vorhergehende $\frac{3}{2}$ mahl grösser, hier aber $\frac{3}{2}$ mahl kleiner, als das nachfolgende Glied. Wenn das vorhergehende Glied $\frac{3}{2}$ des Verhältnisses $\frac{3}{2}:1$ abnimt: so nimt der Logarithme $(\frac{3}{2}:1)$ ab, und dieser Logarithme verschwindet, wenn $\frac{3}{2}=1$ wird, weil nun das Verhältniß selbst keine Grösse hat (138 §). Wird das vorhergehende Glied kleiner, als 1: so wächst das Verhältniß wieder, aber auf entgegengesetzte Art. Nun wird das vorhergehende Glied gegen das folgende kleiner, da es vorher grösser war. Wenn nun $\frac{2}{3}$ daraus wird: so ist es so viel mahl kleiner,

ner, gegen das folgende, so viel mahl grösser es vorher gegen dasselbe war. Demnach ist das Verhältniß $\frac{2}{3}:1$ dem vorigen $\frac{3}{2}:1$ gleich, aber entgegengesetzt. Dies erhellet auch daraus, weil beide Verhältnisse in der Zusammensetzung einander aufheben. Denn es ist $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}:1 \times 1 = 1:1$. Beides muß der Logarithmus $(\frac{2}{3}:1)$ ausdrücken. Dieser ist also wegen des ersten Umstandes $= l(\frac{3}{2}:1)$, und wegen des letzten Umstandes dem $l(\frac{3}{2}:1)$ entgegengesetzt; das heist, er ist $= -l(\frac{3}{2}:1)$ (1. 5 §).

Nun ist $l(\frac{3}{2}:1) = l\frac{3}{2} = l3 - l2$, also $l(\frac{2}{3}:1) = l\frac{2}{3} = l2 - l3$. Demnach ist die Regel des 138 § allgemein, wenn gleich das Dividendum kleiner, als der Divisor, und der Bruch ein eigentlicher Bruch ist. Man kan nemlich stat des Bruchs $\frac{2}{3}$, der im Beweise der Deutlichkeit wegen gebraucht worden, jeden andern setzen, weil auf die Grösse desselben gar nichts ankomt.

Verhältnisse, in welchen das vorhergehende Glied grösser, als das nachfolgende ist, heissen sonst auch **Verhältnisse der grössern Ungleichheit**. So, wie diejenigen, worin das vorhergehende Glied kleiner ist, als das nachfolgende, **Verhältnisse der kleinern Ungleichheit** heissen.

Die Logarithmen aller Verhältnisse der letzten Art, also auch aller eigentlichen Brüche, sind demnach negativ, wenn der Logarithme der basis positiv genommen wird, und diese basis grösser, als 1 ist.

Wenn aber die basis kleiner, als 1 ist: so werden die Logarithmen der eigentlichen Brüche positiv, und die Logarithmen der ganzen Zahlen, und uneigentlichen Brüche, so wie die Logarithmen aller Verhältnisse der grössern Ungleichheit negativ.

141 §.

141 §.

Der Logarithme einer jeden Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten multiplicirt, wenn der letzte gleich negativ ist.

Beweis. Es ist $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, es mag m eine ganze Zahl, oder einen Bruch bedeuten (65 §), also $la^{-m} = l1 - mla$. Aber $l1 = 0$ (138 §). Also $la^{-m} = -mla$.

Demnach verhalten sich die Logarithmen aller Potenzen einer und eben derselben Wurzel, wie die Exponenten der Potenzen, und wenn die Wurzel selbst die basis des Systems ist: so sind die Exponenten der Potenzen zugleich ihre Logarithmen. Weil nemlich $la^m = mla$, was auch m für eine Zahl bedeutet: so ist $mla = m$, wenn $la = 1$, oder a die basis des Systems ist.

Ist also die basis eines Systems gegeben, und man soll den Logarithmen einer andern Zahl suchen, der zu eben diesem System gehöret: so soll man eine Zahl finden, welche ausdrückt, in wie viel gleiche Factoren die basis zerfället, und wie viel solcher Factoren hinwiederum ineinander multiplicirt werden müssen, um die gegebene Zahl herzustellen; oder mit andern Worten: es heist, die gegebene Zahl als eine Potenz der basis ansehen, und den zugehörigen Exponenten suchen.

142 §.

In verschiedenen Logarithmen-Systemen verhalten sich die Logarithmen eines und eben

desselben Verhältnisses gegen einander umgekehrt, wie die Fundamental-Verhältnisse der Systeme.

Beweis. In dem einen System sey $a:n$, in dem andern $a^n:1$ das Fundamental-Verhältniß: so werden die Systeme diese seyn.

I. System.

		a	n	$2n$	$3n$	$4n$	rn
1	a	a	- - a	- - a	- - a	- - a	- - a

Die Logarithmen.

0	1	2	- - n	- $2n$	- $3n$	- $4n$	- rn

II. System.

		a	n	$2n$	$3n$	$4n$	rn
1	a	a	- - a	- - a	- - a	- - a	- - a

Die Logarithmen.

0	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	- 1	- 2	- 3	- 4	- r

Diesemnach ist im ersten System $l(a:1)=1$, im zweyten aber $l(a:1)=\frac{1}{n}$; im ersten System ist $l(a^2:1)=2$, und im zweyten wird $l(a^2:1)=\frac{2}{n}$.

Ueberhaupt ist im ersten System $l(a^{rn}:1)=rn$, und im zweyten wird $l(a^{rn}:1)=r$. Wenn demnach L die Logarithmen des zweyten Systems bedeutet: so wird $l(a^{rn}:1):L(a^{rn}:1)=n:1=l(a^n:1):l(a:1$. Da nun in dem I System diese Logarithmen: $l(a^n:1)$, und $l(a:1)$ die Grösse der Verhältnisse $a^n:1$ und

$a:1$

$a:1$ gegen einander ausdrücken: so verhalten sich $l(a^{rn}:1):L(a^{rn}:1)$ umgekehrt, wie des letztern Systems Fundamental-Verhältniß zum Fundamental-Verhältniß des ersten.

Es hat nemlich mit dieser Sache eben die Bewandniß, wie mit allen andern Messungen. Von der Verschiedenheit des Maasses, dessen man sich bedienet, rührt es her, daß eine, und eben dieselbe Grösse, bald durch diese, bald durch jene Zahl ausgedrückt wird, nachdem man dieses, oder ein andres Maaß erwählet hat: da dann die Zahlen, welche einerley Grösse aus verschiedenen Maassen ausdrücken, sich umgekehrt, wie diese Maasse verhalten (206 § Rech.). Ist z. E. eine Distanz 100 Ruthen lang, und man rechnet 10 Fuß auf eine Ruthe; so ist eben die Distanz 1000 Fuß lang, da denn 100:1000 = Fuß:Ruthe.

Wäre also in dem I System $l(a^n:1)=\lambda$, da im zweyten System $L(a^n:1)=1$ ist: so wäre $L(a^{rn}:1) = \frac{1}{\lambda} l(a^{rn}:1)$. Demnach sind die Logarithmen, welche einer und eben derselben Zahl in verschiedenen Systemen zugehören, in einem bestimten Verhältniß, welches für alle Zahlen einerley bleibt.

143 §.

Wenn man für alle Zahlen die zugehörigen Logarithmen hätte, oder wenigstens leicht finden könte, und wenn man auch umgekehrt die Zahl leicht wissen könte, die einem herausgebrachten Logarithmen zugehörte, kurz, wenn man ein für allemahl ein gewisses Logarithmisches System berechnet hätte: so würde

de man bey weitläuftigen Rechnungen, wo grosse Zahlen in einander zu multipliciren und zu dividiren vorkommen, mit ihren Logarithmen rechnen könnte (136. 137. 138 §). Man würde durch Hülfe der Logarithmen überaus leicht jede Zahl auf jede verlangte Potenz erheben, und aus jeder Zahl eine verlangte Wurzel ausziehen können (129 §), und dies alles würde die Rechnungen ungemein erleichtern. Durch diese Betrachtung sind verschiedene Mathematiker im Anfange des vorigen Jahrhunderts bewogen worden, dergleichen Logarithmen-Systeme zum practischen Gebrauch zu berechnen, und dies ist der Ursprung der sogenannten Logarithmen-Tafeln.

§. 144

Die erste Erfindung der Logarithmen hat man einem Schottländischen Freyherrn, **Joh. Neper, Bar. von Merchiston**, zu verdanken. Er verglich die Eigenschaften der Arithmetrischen und Geometrischen Proportion (160. 175 §. R.) mit einander, und die davon abhängenden Eigenschaften der Arithmetischen und Geometrischen Progressionen. (164. 165. 178. 179. 191 §. Rech.). Bey den Arithmetischen Proportionen und Progressionen wird das durch die Addition und Subtraction gefunden, was man bey den Geometrischen durch die Multiplication und Division findet. Dies brachte ihn auf die Gedanken, eine Arithmetische Progression mit einer Geometrischen so zu verbinden, daß die Glieder der einen eine beständige Verbindung mit den gleichnahmichten Gliedern der andern hätten, und jedes Glied der einen das gleichnahmichte Glied der andern bestimte. Man setze unter den Gliedern der Geo-

metri-

metrischen Progression P, die von 1 anfängt, eine Arithmetische L, die von 0 anfängt, auf folgende Art:

P	1	2	4	8	16	32	64	128	256 u. s. f.
L	0	1	2	3	4	5	6	7	8 u. s. f.

so drückt jede Zahl der Reihe L z. E. 5 aus, wie viel gleiche Verhältnisse in der Geometrischen Progression zwischen dem ersten und demjenigen Gliede fallen, so mit der vorigen Zahl der Arithmetischen Reihe gleichnahmicht ist, welches hier die Zahl 32 seyn würde. Dies brachte Nepern auf den Nahmen ἀριθμὸς λόγων, (numerus rationum) oder Verhältniß-Zahl.

145 §.

Es ist nicht nothwendig, daß die Reihe P von der 1, und die Reihe L von der 0 anfange, ob dies gleich die einfacheste Voraussetzung ist. Hätte man die Reihen

P	7	21	63	189	567 u. s. f.
L	5	9	13	17	21 u. s. f.

so würden doch zwischen 5 und 21 so viel gleiche Differenzen fallen, als es zwischen 7 und 567 gleiche Verhältnisse giebt, und eben diese Bewandniß hat es mit jeden zweyen andern gleichnahmichten Gliedern. Man drücke beide Reihen allgemein so aus:

	1	2	3	4	5	6
(P)	a	am	am	am	am	am - - -
(L)	a	$a+\delta$	$a+2\delta$	$a+3\delta$	$a+4\delta$	$a+5\delta$ $a+6\delta$ - -

und nenne die Glieder der Reihe L die Logarithmen der Glieder der Reihe P: so erhellet, daß die Logarithmen aller Glieder der Reihe P bestimt sind, wenn man die Logarithmen zweyer ihrer Glieder bestimt hat. Es kan hier also $a = 1$ genommen

werden,

wrrden, ohne, daß es schlechterdings nothwendig sey $\alpha = 0$ zu nehmen. In der That aber komt doch bey dieser Art, den Ursprung der Logarithmen vorstellig zu machen, alles auf den Umstand an, daß die gleichen Differenzen der Reihe L die Anzahl der zugehörigen gleichen Verhältnisse der Reihe P anzeigen. Und auf diesen Umstand gründen sich alle Schlüsse, worauf Neper die Berechnung des Logarithmischen Systems gebauet hat, so er zuerst bekant machte, als er 1614 zu Edenburg das berühmte Werk: Mirifici canonis Logarithmorum descriptio herausgab. Es sind die Gründe davon in der zweyten, nach dem Tode des Erfinders, von seinem Sohn im Jahr 1619 herausgegebenen neuen Auflage des gedachten Werks vollständiger aus einander gesetzt. Und wer den Zusammenhang der daselbst vorgetragenen Theorien in Erwegung ziehen will, wird bald finden, daß die eigentliche Natur der Logarithmen nach den eigentlichen Begriffen des Erfinders, die er selbst so völlig bestimt, und genau nicht aus einander gesetzt hat, am besten durch die im 130 und 131 § gegebene Erklärung ins Licht gesetzt werde. Die besten unter den neuern Schriftstellern, welche die Anfangsgründe abhandeln, erklären sich darüber eben so, dahin ich vornemlich folgende rechne. Hausen in den Elementis Matheseos 58 S. 6 Defin. von Segner in den Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie 13 Abschnitt 140 u. f. §. auch in beyden Ausgaben der lateinischen Anfangsgründe. Kästner in den Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie im VI Cap. der Rechenkunst 18 §.

Wenn der Logarithme einer von 1 unterschiedenen Zahl $= 0$ gesetzt wird: so drücken die Logarithmen

men eigentlich die Grösse der Verhältnisse ihrer zugehörigen Zahlen, gegen diejenige Zahl aus, deren Logarithme = 0 genommen ist. Man nehme z. E. folgendes System:

(P) $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 8 16 32 u. s. f.

(L) −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 u. s. f.

wo $l1 = 3$ ist. Wenn man beyde Reihen rückwärts fortsetzt: so wird $l\frac{1}{8} = 0$, und der Ausdruck $l1 = 3$ will hier eigentlich so viel sagen, $l(1 : \frac{1}{8}) = 3$. Das Fundamental-Verhältniß dieses Systems ist das Verhältniß $\frac{1}{4} : \frac{1}{8}$, oder 2 : 1, so, daß eigentlich $l(\frac{1}{4} : \frac{1}{8})$ oder $l(2 : 1) = 1$ ist: so wie $l(\frac{1}{8} : \frac{1}{8}) = l(1 : 1) = l1 = 0$ bleibt, wie nach dem 138 § erfodert wird.

146 §.

Vieper nahm bey der Berechnung seiner Tafeln folgende Voraussetzung an. Er setzte $l10000000 = 0$, und $l9999999 = 1$. Also ward bey ihm die Hauptreihe eine abnehmende Progression in dem Verhältniß 9999999 : 10000000, welches mit dem Verhältniß 0,9999999 : 1 einerley ist. Wenn man nun die Geometrische Progression, welche mit den beyden ersten Gliedern 10000000, 9999999 anfängt, fortsetzen will: so hat man nur zu erwegen, daß das zweyte Glied um $\frac{1}{10000000}$ Theil kleiner, als das erste sey. Man subtrahire also von jedem Gliede $\frac{1}{10000000}$ Theil desselben: so hat man das folgende, und dann werden die Zahlen, 0, 1, 2, u. s. f. wie sie in der Ordnung nach einander folgen, die zugehörigen Logarithmen seyn, die man ihnen auf folgende Art zur Seite setzen kan:

Zahlen

Zahlen	Logarithmen
10000000, 0000000	0
1, 0000000	
9999999, 0000000	1
0, 9999999	
9999998, 0000001	2
0, 9999998	
9999997, 0000003	3
0, 9999997	
9999996, 0000006	4
0, 9999996	
9999995, 0000010	5
0, 9999995	
9999994, 0000015	6 u. s. f.

Man siehet hieraus, daß das von Nepern gebrauchte Fundamental-Verhältniß = 9999999 : 10000000 = 0,9999999 : 1 sey. Denn dieses Verhältnisses Logarithme ist eigentlich bey ihm = 1, deswegen haben in seinem System die Verhältnisse der kleinern Ungleichheit, also die eigentlichen Brüche positive, und die Verhältnisse der grössern Ungleichheit, folglich die ganzen Zahlen und uneigentlichen Brüche, negative Logarithmen (140 §). Oder da er alle übrige Zahlen stat der Einheit mit 10000000 vergleicht: so haben die Zahlen, welche grösser, als 10000000 sind, negative Logarithmen.

Wenn man zu 9999999 und 10000000 die dritte Proportional-Zahl sucht: so findet man 10000001, 0000001 rc, welche Zahl beynahe nur um $\frac{1}{10000000000000}$ Theil des ersten Gliedes

das

das erste übertrift. Man addire also zu jedem Gliede 0,0000000100000001, d. i. $\frac{1}{10000000}$ + $\frac{1}{10000000}$ Theil desselben: so läst sich obige Reihe der Zahlen mit ihren Logarithmen auf diese Art rückwärts fortsetzen:

Zahlen	Logarithmen
10000000, 0000000	0
10000001, 0000001	1
1, 0000002	
10000002, 0000003	2
1, 0000003	
10000003, 0000006	3
4, 0000004	
10000004, 0000010	4
1, 0000005	
10000005, 0000015	5
1, 0000006	
10000006, 0000021	6 u. s. f.

Dies wird hinlänglich seyn, einen etwanigen Begrif von dem Neperschen Logarithmen-System zu geben. Das Verhältniß 0,9999999 : 1 wird dabey als das gemeinschaftliche Maaß aller übrigen Verhältnisse angesehen, und da dies nicht in völliger Schärfe richtig ist: so muß man sich damit begnügen, daß man nur beynahe die Zahlen weiß, die jedem Logarithmen zugehören. Man läßt dabey mit Nepern die kleinen Brüche weg, und setzt z. E. $l9999998 = 2$; $l9999997 = 3$ u. s. f. Es ist nicht nöthig hier ausführlicher zu zeigen, wie in den Neperschen Tafeln alle übrige Logarithmen von

ihm sind berechnet worden. Denn einmahl enthalten seine Tafeln eigentlich nicht die Logarithmen der Zahlen, so wie sie in natürlicher Ordnung nach einander folgen; sondern vielmehr die Logarithmen der Verhältnisse gewisser Linien gegen einander, die man bey der fernern Anwendung der Rechenkunst auf die Geometrie erstlich kennen lernt. Und zweetens wird das Nepersche System fast gar nicht mehr gebraucht, nachdem man auf Nepers eigenen Rath ein andres System berechnet hat, das zum practischen Gebrauch bequemer ist. Es wird unten in der höhern Mathematik mehreres von den Neperschen Logarithmen gesagt werden, und hier kan es genügen, nur noch folgende hieher gehörigen Umstände anzumerken.

147 §.

Die Nepersche Logarithmen heissen bey den meisten mathematischen Schriftstellern auch die natürlichen Logarithmen, obgleich die letztern mit jenen nicht so ganz völlig einerley sind. Diejenige Voraussetzung bey den Nepersche Logarithmen, wodurch sich dies System vornemlich von allen übrigen unterscheidet, ist diese, daß ein sehr kleines Verhältniß, nemlich 9999999:10000000 für das Maaß aller übrigen angenommen, und der Logarithme desselben dem Ueberschuß des grössern Gliedes über das kleinere gleich gesetzt wird. Es ist nemlich $l(9999999:10000000)=1=10000000-9999999$ angenommen. Diesen Umstand behält man bey demjenigen Logarithmen-System bey, welches man das natürliche nennt; aber man gehet dabey in folgenden beyden Stücken von den Nepersche Voraussetzungen ab. Man setzt die Logarith-

garithmen der ganzen Zahlen und uneigentlichen Brüche positiv, damit die Logarithmen der eigentlichen Brüche negativ werden. Vermöge dieser Veränderung würde $l(10000001:10000000 = +1$, da dieser Logarithme beym Neper $= -1$ ist. Ueberdem aber dividirt man beyde Glieder dieses Verhältnisses durch 10000000, und behält übrigens die Voraussetzung bey, daß die Differenz der Glieder der Logarithme dieses Verhältnisses werde. Auf solche Art erhält man $l(1,0000001:1) = 0,0000001$. Man fängt demnach die Hauptreihe von der 1 an, so, daß alles den im 131 § festgesetzten Begriffen und den daraus geschlossenen Folgen mehr gemäß wird. Also ist in der That die basis der natürlichen Logarithmen von der basi der Neperschen unterschieden. Dasjenige Verhältniß, welches bey den Neperschen die basis ist, wird bey den natürlichen Logarithmen der $\frac{1}{10000000}$ste Theil der basis. Ist e die basis der natürlichen Logarithmen: so folgt aus der Voraussetzung $l\,1,0000001 = 0,0000001$, daß $1,0000001 = e^{\frac{1}{10000000}}$, also $e = 1,0000001^{10000000}$ seyn müsse (47 §). Wie diese Zahl gefunden werden könne, wird sich bald weiter zeigen lassen, wenn zuförderst diejenigen Logarithmen näher beschrieben sind, der man sich jetzt stat der Neperschen zu bedienen gewohnt ist. Das folgende wird davon einen nähern Unterricht geben.

Der VII. Abschnitt.

Von den Briggischen Logarithmen.

148 §.

Henrich Brigg, der Geometrie Professor zu Oxford, war der erste, der auf Nepers Rath ein andres System berechnete. Dies geänderte System wird jetzt unter dem Namen des Briggischen, oder gemeinen Logarithmen-Systems gewöhnlich gebraucht. Er hat es in seiner zu Oxford im Jahr 1624 herausgegebenen Arithmetica Logarithmica zuerst bekannt gemacht. In diesem Briggischen System ist das Verhältniß 10:1 für das einfache, oder die Zahl 10 als die basis des Systems angenommen. Also liegt im Briggischen System folgende Progression zum Grunde:
1 10 100 1000 10000 100000 1000000 u.s.f.
und es ist $l100=2$, $l1000=3$, $l10000=4$, $l100000=5$, $l1000000=6$ u. s. f. Demnach ist nun die Frage: Wie findet man die Logarithmen der Zahlen, die zwischen den Hauptzahlen dieser Reihe fallen? z. E. wie groß ist $l2$, $l3$, $l4$, u.s.f. Man muß in solcher Absicht jede dieser Zahlen als eine Potenz der 10 ansehen, und den zugehörigen Exponenten suchen. Diese Exponenten werden insgesamt Brüche seyn, weil alle Potenzen ganzer Exponenten von 10 in der Hauptreihe vorkommen. Sucht man z. E. $l4$: so soll $4=10^{\frac{n}{m}}$ seyn, und man frägt, wie groß ist $\frac{n}{m}$? (141 §) Die Logarithmen der Zahlen zwischen

zwischen 1 und 10 sind also eigentliche Brüche, die übrigen alle uneigentliche Brüche, aber solche, die sich auf keine ganze Zahlen bringen lassen.

Ja diese Logarithmen werden sich eigentlich nicht einmahl durch Zahlen genau ausdrücken lassen. Es sey $lN = \frac{n}{m}$: so ist $N = 10^{\frac{n}{m}}$, oder $N = \sqrt[m]{10^n}$. Aber aus 10^n läst sich keine andere rationale Wurzel ausziehen, wofern diese Wurzel nicht selbst entweder $= 10$, oder eine Potenz von 10 ist, und eine solche Wurzel soll N nicht seyn. Demnach können n und m keine bestimte ganze Zahlen, und also $\frac{n}{m}$ kein rationaler Bruch seyn. Aus der Ursache muß man sich damit begnügen, diese Logarithmen vermittelst einer Näherung durch solche Brüche auszudrücken, die von den eigentlichen Werthen dieser Logarithmen nur so wenig unterschieden sind, daß man in der Ausübung den Unterschied aus der Acht lassen kan.

149 §.

Die mittlere Geometrische Proportionalzahl zwischen 1 und 10 ist 3,162277rc (111 §), und $l3{,}162277\text{rc} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (139 §). Zwischen 1 und 3,162277 fallen die Zahlen 2, und 3, zwischen 3,162277 und 10 aber die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9. Man kan aufs neue zwischen 1, und 3,162277, oder auch zwischen 3,162277 und 10 eine mittlere Proportionalzahl mit ihrem zugehörigen Logarithmen, und auf solche Art immer engere Grenzen suchen, zwischen welchen eine von den Zahlen 2 bis 9 fallen muß. Wenn nun ein paar von diesen Grenzen, zwischen denen eine dieser Zahlen fällt, einander so nahe gebracht

sind, daß ihr Unterschied von einander in der Ausübung aus der Acht gelassen werden kan: so wird auch der Unterschied dieser Zahl selbst von einer dieser Grenzen aus der Acht gelassen werden, und der Logarithme einer dieser beyden Grenzen für den Logarithmen, der zwischen ihren enthaltenen Zahl selbst, angenommen werden können. Gesetzt also, man suchte den Logarithmen der Zahl 5: so würde man folgende Berechnung anstellen müssen. Wenn

A = 1,000000	$lA = 0,0000000$	
B = 10,000000	$lB = 1,0000000$	so sey
und	es wird:	$C = \sqrt{A.B}$
		ferner
C = 3,162277	$lC = 0,5000000$	$D = \sqrt{B.C}$
D = 5,623413	$lD = 0,7500000$	$E = \sqrt{C.D}$
E = 4,216964	$lE = 0,6250000$	$F = \sqrt{D.E}$
F = 4,869674	$lF = 0,6875000$	$G = \sqrt{E.F}$
G = 5,232991	$lG = 0,7187500$	$H = \sqrt{F.G}$
H = 5,048065	$lH = 0,7031250$	$I = \sqrt{G.H}$
I = 4,958069	$lI = 0,6953125$	$K = \sqrt{H.I}$
K = 5,002865	$lK = 0,6992187$	$L = \sqrt{I.K}$
L = 4,980416	$lL = 0,6972656$	$M = \sqrt{K.L}$
M = 4,991627	$lM = 0,6982421$	$N = \sqrt{L.M}$
N = 4,997242	$lN = 0,6987304$	$O = \sqrt{M.N}$
O = 5,000052	$lO = 0,6989745$	$P = \sqrt{N.O}$
P = 4,998647	$lP = 0,6988525$	$Q = \sqrt{O.P}$
Q = 4,999350	$lQ = 0,6989135$	$R = \sqrt{P.Q}$
R = 4,999701	$lR = 0,6989440$	$S = \sqrt{Q.R}$
S = 4,999876	$lS = 0,6989592$	$T = \sqrt{R.S}$
T = 4,999963	$lT = 0,6989668$	$V = \sqrt{S.T}$
V = 5,000008	$lV = 0,6989707$	$lW = \sqrt{T.V}$
W = 4,999984	$lW = 0,6989687$	$X = \sqrt{V.W}$
X = 4,999997	$lX = 0,6989697$	$Y = \sqrt{W.X}$
Y = 5,000003	$lY = 0,6989702$	$Z = \sqrt{X.Y}$
Z = 5,000000	$lZ = 0,6989700$	

Diese Berechnung zeiget, daß die zuletzt herausgebrachte Zahl Z nicht mehr um $\frac{1}{10000000}$ von der Zahl 5 unterschieden sey, deswegen kan man $lZ = 0,6989700 = l5$ annehmen.

150 §.

Auf diese mühsame Art hat Brigg die Logarithmen berechnen müssen, da ihm diejenigen Hülfsmittel noch nicht bekannt waren, die man nach der Zeit erfunden hat, die aber in der höhern Mathematik allererst erkläret werden können. Inzwischen war es doch nicht nöthig, alle Logarithmen so weitläuftig zu suchen. Man hatte nur die Logarithmen der Primzahlen nöthig, um daraus die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch die blosse Addition zu finden (136. 137 §). Unter den Logarithmen der Primzahlen ergiebt sich nun auch schon der $l2$ durch die Subtraction nach dem 138 §. Denn es ist

$$l10 = 1,0000000$$
$$l5 = 0,6989700$$

Also $l2 = 0,3010300$

Nun hat man zugleich

$$l4 = 0,6020600$$
$$l8 = 0,9030900$$

Man kan also den $l3$ finden, wenn man zwischen 2 und 4 eine mittlere Proportionalzahl mit ihrem zugehörigen Logarithmen sucht, und dann mit der Rechnung eben so, wie vorhin im 149 §, fortfährt, bis man auf eine mittlere Zahl komt, die von der Zahl 3 nicht mehr um $\frac{1}{10000000}$ unterschieden ist, da man denn ihren Logarithmen für den Logarithmen der Zahl 3 selbst annimt. Man findet auf die Art

$l3 = 0,4771212$

Also $l6 = 0,7781512$

$l9 = 0,9542424$

Nun fehlt unter den Zahlen, die zwischen 1 und 10 fallen, nur die Zahl 7, und man findet aus den beyden Logarithmen der Zahlen 6 und 8, wie vorhin im 149 §,

$l7 = 0,8450980.$

Aus diesen 10 Logarithmen giebt sich nun sehr leicht eine grosse Menge anderer durch die blosse Addition. So erhält man

$l12 = l6 + l2 = 1,0791812$

$l14 = l7 + l2 = 1,1461280$

$l15 = l5 + l3 = 1,1760913$

$l16 = 2l4 = 1,2041200$

$l18 = l9 + l2 = 1,2552725$

$l20 = l10 + l2 = 1,3010300$

Aber für die Zahlen 11, 13, 17, 19 müssen die Logarithmen wie im 149 § gesucht werden, und man findet

$l11 = 1,0413927$

$l13 = 1,1139433$

$l17 = 1,2304489$

$l19 = 1,2787536$

Unter den Zahlen zwischen 20 und 30 kommen nur die beyden Primzahlen 23 und 29 vor, der übrigen ihre Logarithmen alle erhält man durch die Addition der Logarithmen ihrer Factoren. Man siehet hieraus, wie es möglich gewesen sey, diese Arbeit für die folgenden Zahlen fortzusetzen.

151 §.

151 §.

Auf solche Art hat Brigg die Logarithmen für alle Zahlen von 1 bis 20000, und sodann von 90000 bis 100000 berechnet, davon man die Tafeln auch in der Trigonometria Britannica findet, die Henrich Gellibrand nach Briggs Tode im Jahr 1633 zu Gaudan herausgegeben. Adrian Vlacq, ein Holländischer Mathematiker, füllte die Lücke aus, welche Brigg gelassen hatte, und berechnete die übrigen Logarithmen der Zahlen, die zwischen 20000 und 90000 fallen. Seine berechneten Tafeln findet man in der von ihm zu Gaudan im Jahr 1628 herausgegebenen Arithmetica Logarithmica Briggii. Nach der Zeit sind verschiedene kleinere Ausgaben der Briggischen Logarithmen-Tafeln besorget worden, worin man die Logarithmen der Zahlen nur von 1 bis 10000 antrift. Dahin gehören verschiedene Holländische, die zu Haag gedruckt sind. Ferner eine Auflage, die der Herr von Wolf im Jahr 1711 zu Halle besorgt hat, die verschiedenemal neu aufgelegt worden. Unter den neuesten ist die beste und vollständigste Ausgabe zu London im Jahr 1742 gedruckt. Sie enthält die Briggischen und Vlacqschen Logarithmen zusammen für alle Zahlen von 1 bis 101000. Der Titel ist: Sherwins Mathematical Tables contrivd after a most comprehensive method &c. by William Gardiner. London 1742. Die Einrichtung dieser Tafeln ist überaus bequem, so daß man bey denselben vieler Rechnungen überhoben seyn kan, die man oft vornehmen muß, wenn man keine andere, als die kleinen Tafeln zur Hand hat, wie das folgende näher zeigen wird.

152 §.

Jeder Logarithme bestehet aus einer ganzen Zahl mit einer Reihe daran hängender Decimal-Brüche; die Logarithmen der ersten 9 Zahlen ausgenommen, welche in der Stelle der Einer eine Null haben. Die ganze Zahl heist die Characteristik oder Kennziffer des Logarithmen. Sie heist deswegen die Characteristik, weil man an derselben sogleich erkennen kan, aus wie viel Ziffern die Zahl bestehen müsse, welche diesem Logarithmen zugehört. Die Zahl bestehet nemlich aus einer Ziffer mehr, als die Characteristik ihres Logarithmen Einheiten enthält. Die Characteristik der Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 9 ist 0, von 10 bis 99 ist sie 1, von 100 bis 999 ist sie 2, von 1000 bis 9999 ist sie 3, und so ferner (148 §). Also ergiebt sich die Characteristik des Logarithmen einer jeden ganzen Zahl sehr leicht von selbst, und das ist die Ursache, weswegen in den Sherwinschen Tafeln die Characteristik bey den Logarithmen weggelassen, indem man sie jedesmahl leicht hinzusetzen kan, wenn man bey vorkommenden Rechnungen die Logarithmen brauchen will.

153 §.

Die Tafeln enthalten nur die Logarithmen für die ganzen Zahlen, aber es kommen oft uneigentliche Brüche vor, die sich nicht auf ganze Zahlen bringen lassen, und wenn man stat der Zahlen selbst mit ihren Logarithmen rechnet: so braucht man zuweilen die Logarithmen solcher uneigentlichen Brüche.

Solcher Brüche Logarithmen findet man nach dem 138 § gar leicht, dafern man nur die Logarithmen des Zehlers und Nenners aus den Tafeln haben kan.

Man

Man kan diese Brüche allemahl auf Decimalbrüche bringen; ist dies geschehen, so weis man den Logarithmen des Nenners von selbst, dieser ist allemahl eine ganze Zahl (148 §), und man braucht nur die Characteristik vom Logarithmen des Zehlers um diese Zahl zu vermindern: so hat man den Logarithmen des Bruchs. Dies wäre also allemahl leicht geschehen, wenn man nur in den Tafeln die Logarithmen für alle ganze Zahlen hätte. Allein da dies auch in den weitläuftigsten und vollständigsten Tafeln nicht erwartet werden kan: so muß man sich zuweilen eines andern Hülfsmittels bedienen, welches im folgenden § beschrieben werden soll.

154 §.

Die Logarithmen eines uneigentlichen Bruchs, der auf Decimalbrüche gebracht ist, oder einer ganzen Zahl, mit anhängenden Decimalstellen, durch Hülfe der Tafeln zu finden.

Aufl. Man sehe die Zahl mit allen Decimalstellen als eine ganze Zahl an. Dafern nun eine solche ganze Zahl in den Tafeln, die man zur Hand hat, mit ihrem Logarithmen vorkomt: so vermindre man die Characteristik dieses Logarithmen um so viel Einheiten, als an der Zahl Decimalstellen hängen: so hat man den gesuchten Logarithmen,

z. E. $l\,4{,}738 = l\frac{4738}{1000} = l\,4738 - l\,1000$

(138 §). Da nun $l\,4738 = 3{,}6755951$: so ist $l\,4{,}738 = 0{,}6755951$. Eben so ist $l\,47{,}38 = 1{,}6755951$, und $l\,473{,}8 = 2{,}6755951$.

Diese Zahl 4738 und überhaupt alle Zahlen, die nicht über vier Ziffern haben, findet man noch in den

kleinern

kleinern Tafeln: aber keine grössere Zahlen, daher man sich in solchen Fällen, wenn die Zahl mehr, als 4 Ziffern hat, dieses Hülfsmittels nicht mehr bedienen kan, es sey denn, daß man grössere Tafeln zur Hand hätte.

Wenn demnach die Zahl 473,8425 gegeben wäre: so müste man eine Logarithmen-Tafel haben, woraus man die Logarithmen für ganze Zahlen, die aus 7 Ziffern bestehen, nehmen könnte. Da man nun diese in den kleinen Tafeln nicht hat: so bedienet man sich des folgenden Hülfsmittels. Wenn man von ein paar Zahlen, die über 1000 hinausgehen, und nur um 1 unterschieden sind, z. E. 1728 und 1729, die Logarithmen aus den Tafeln nimt, und den kleinern vom grössern subtrahirt; wenn man ferner den Logarithmen der kleinern Zahl 1728 auch von dem Logarithmen der nächstfolgenden von ihr um 2 unterschiedenen Zahl, z. E. 1730 subtrahirt: so findet man, daß die Differenz der den beyden letzten, um 2 unterschiedenen Zahlen, zugehörigen Logarithmen ebenfalls fast doppelt so groß sey, als die Differenz der den beyden ersten, um 1 unterschiedenen Zahlen, zugehörigen Logarithmen,

z. E. l1029 = 3.0124154 l1030 = 3.0128372
l1028 = 3.0129931 l1028 = 3.0119931
Differenz 4223 Differenz 8441.

Die letzte Differenz ist nur etwas weniger kleiner, als 2 × 4223 = 8446. Hieraus ist zu schliessen, daß die Differenzen solcher Zahlen, die nicht einmal völlig, oder höchstens um 1 unterschieden sind, den Differenzen ihrer Logarithmen ziemlich genau proportional seyn werden. Je kleiner die Zahlen selbst

sind,

sind, desto unrichtiger wird diese Voraussetzung, wie die Probe zeigt, wenn man einen ähnlichen Versuch, wie vorhin, mit kleinern Zahlen macht. Je grösser aber die Zahlen sind, desto näher komt diese Voraussetzung der Wahrheit. So hat man z. E.

$l9986 = 3,9993916$	$l9986 = 3,9993916$
$l9985 = 3,9993481$	$l9984 = 3,9993046$
Differenz 435	Differenz 870

wo die letzte Differenz schon genau deppelt so groß, als die erste ist, inzwischen ist dies nur in 10 Millionentheilen zu verstehen. Wären die Logarithmen auf mehr, als 7 Decimalstellen berechnet: so würde sich auch hier die Abweichung von der Voraussetzung in kleinern Decimaltheilen ergeben. Aber bey den gemeinsten Rechnungen braucht man die Logarithmen nur bis auf 6 oder 7 Decimalstellen richtig zu haben; deswegen kan man sich der obigen Voraussetzung in solchen Fällen allemal bedienen.

Durch Hülfe dieser Voraussetzung kan man nun den Logarithmen einer Zahl, wie z. E. 473,8425 auf folgende Art suchen. Man lasse Anfangs von den letzten Ziffern so viele weg, daß nur die vier höchsten übrig bleiben. Wenn nun gleich unter diesen Ziffern noch Decimalstellen seyn sollten: so sehe man demnach diese vier Ziffern so an, als ob sie eine ganze Zahl ausdrückten, und nehme sowohl den Logarithmen dieser, als auch der folgenden, um 1 grössern Zahl aus den Tafeln. Auf solche Art erhielte man $l4738 = 3,6755951$, und $l4739 = 3,6756867$. Wenn man nun den kleinern Logarithmen vom grössern subtrahirt: so weis man die Differenz des Logarithmen der Zahl, die um 1 grösser, als 4738 ist

vom

vom $l4738$. Man kan also schliessen: die Differenz 1 verhält sich zum Decimalbruch, der an der Zahl 4738 hängt, wie die Differenz zwischen $l4739$ und $l4738$ zu einer vierten Zahl. Diese vierte Zahl muß man zum $l4738$ addiren, um den Logarithmen der Zahl zu haben, die um den noch anhängenden Decimalbruch grösser ist, als 4738, welches im Exempel die Zahl 4738,425 seyn würde. Addirt man also diese Differenz wirklich: so hat man im gegenwärtigen Fall den $l4738,425$. Aber man wollte den $l473,8425$ haben, es hatte die ganze Zahl eine Ziffer weniger, als man angenommen hat. Um deswillen muß man nun von der Characteristik des gefundenen Logarithmen 1 subtrahiren. Und überhauot muß man die Characteristik um so viele Einheiten vermindern, als unter den ersten vier Ziffern Decimalstellen sind. Denn wäre $l4738,425 = \lambda$ gefunden: so ist $473,8425 = \frac{4738425}{10}$, also $l473,8425 = \lambda - l10 = \lambda - 1$, und aus eben dem Grunde $l47,38425 = \lambda - l100 = \lambda - 2$, und $l4,738425 = \lambda - l1000 = \lambda - 3$. Nun wird man sich leicht in folgende Berechnung finden:

$l4739 = 3,6756867$
$l4738 = 3,6755951$

Differenz 916

916
0,425

4580
1832
3664

389,300

Also
1 : 0,425 = 916 : vierte Zahl

$l4738 = 3,6755951$
389

$l4738,425 = 3,6756340$

Also $l473,8425 = 2,6756340$

Die

Die Einheiten der Differenz 916 zwischen dem nechst grössern und nechst kleinern Logarithmen sind 10 Millionentheile der Einheit, welche die Characteristik der Logarithmen ausdrückt, also versteht es sich von selbst. daß die Einheiten der herausgebrachten Zahl 389,3 ebenfalls 10 Millionentheile sind. Braucht man also die Logarithmen nur bis auf die siebende Decimalstelle: so kan man die niedrigen Ziffern, dergleichen hier die letzte 3 ist, weglassen.

Wenn man diese Sache etwas genauer ansiehet: so nimt man bald wahr, daß man nie nöthig habe, mehr als drey oder höchstens vier Ziffern, die nach den vier höchsten folgen, in Betrachtung zu ziehen, wenn man den gesuchten Logarithmen nur in sieben Decimalstellen richtig haben will, wie denn auch die gemeinen Tafeln nicht für mehrere berechnet sind. Zwey nechst auf einander folgende Logarithmen, deren Characteristik 3 ist, sind nur in den drey, höchstens den vier letzten Decimalstellen unterschieden. So ist $l\,1001 = 3.0004341$, welcher nur um 0.0004341 grösser ist, als $l\,1000 = 3,0000000$. Wenn man vom $l\,4346 = 3,6380897$ den vorhergehenden $l\,4345 = 3,6379898$ subtrahirt: so wird die Differenz 999, welche nur noch aus drey Ziffern bestehet. Es kan sich also die Differenz nur höchstens auf 10000 Theile erstrecken. Multiplicirt man demnach die höchste Ziffer mit einer andern, die auch 10000 Theile ausdrückt: so drückt die niedrigste Ziffer schon 100000000 Theile aus, und komt in die achte Decimalstelle, daß also die höchste Ziffer des Products nur noch in die siebende Decimalstelle kommen kan. Wenn man demnach für die Zahl 4738,425639743 den zugehörigen Logarithmen

men suchen sollte: so würde man sich eine unnöthige Mühe machen, wenn man zu 1, zu 0,425639743, und zur Differenz 0,0000916 die vierte Proportionalzahl in allen ihren Theilen suchen wollte, denn man würde doch nur die 3 höchsten Ziffern davon 389 brauchen. Und wenn man gleich die folgenden Ziffern mitnehmen, und den Logarithmen in mehr, als 7 Decimalstellen ausdrücken wollte: so würde man ihn doch nicht richtig herausbringen, weil man die Differenz der beyden Grenzen, nemlich 0,0000916 nur bis auf die siebende Decimalstelle aus den Tafeln haben kan.

Uebrigens erhellet leicht, daß man in der That nicht nöthig habe, auf die Characteristik des Logarithmen bey der ganzen Rechnung Betracht zu nehmen, bevor sie völlig geendiget ist. Man kan sie gleich von Anfang an weglassen, und nachdem man die Decimaltheile des gesuchten Logarithmen herausgebracht hat: so weis man von selbst, daß die Characteristik um 1 kleiner seyn müsse, als die Anzahl der Ziffern, woraus der ganze Theil der gegebenen Zahl bestehet (152 §).

155 §.

Die ersten 7 Decimalstellen des Logarithmen einer Zahl, welche die Grenzen der gemeinen Tafeln überschreitet, zu finden.

Aufl. Es beruhet die in dieser Absicht vorzunehmende Rechnung mit der vorigen auf einerley Gründen, und es ergeben sich leicht folgende Regeln. Man nehme an, daß die vier höchsten Ziffern der Zahl allein eine ganze Zahl, und die folgenden Decimaltheile bedeuten: so kan man ihren Logarithmen nach den

Regeln

Regeln des vorigen § finden. Man suche also diesen Logarithmen, und gebe ihm eine Characteristik, die um 1 kleiner ist, als die Anzahl der Ziffern, welche zu dem eigentlichen ganzen Theil der gegebenen Zahl gehören: so hat man den gesuchten Logarithmen. So erhellet, es sey z. E. $l47384,25 = l4738,425 \times 10 = l4738,425 + 1 = 4,6756340$ (136 §), $l473842,5 = l4738,425 \times 100 = l4738,425 + 2 = 5,6756340$, und eben so $l4738425 = l4738,425 \times 1000 = l4738,425 + 3 = 6,6756340$.

Bey grössern und vollständigern Tafeln würde es nicht nöthig seyn, diese Aufgabe auf die ersten 7 Decimalstellen eines gesuchten Logarithmen einzuschränken. Die Logarithmen müsten weiter, als bis auf 7 Decimalstellen berechnet seyn, wenn die Methode bey grössern Zahlen, die Logarithmen in mehr Decimalstellen richtig geben sollte, welches die beym vorigen § angebrachte Erinnerung zur Genüge beweiset. Für ein paar so grosse Zahlen, die über 10000000 hinausgehen, sind die Logarithmen zweyer um 1 unterschiedener ganzen Zahlen, nicht mehr in der 7ten Decimalstelle unterschieden.

Wenn man bey einer jeden vorkommenden ganzen Zahl wissen könnte, ob sie eine Primzahl, oder zusammengesetzte Zahl sey, und wenn man im letzten Fall die Factoren der Zahl zu finden wüste: so könte man ihren Logarithmen sogleich durch die Addition der Logarithmen ihrer Factoren suchen. So ist die Zahl $6081075 = 3003 \times 2025$. Also $l6081075 = 6,7839803$. Hier lassen sich demnach die im XI Abschnitt der Rechenkunst erwiesenen Kennzeichen der Divisoren zuweilen mit Vortheil gebrauchen.

156 §.

Den Briggischen Logarithmen eines eigentlichen Bruchs, der auf Decimalbrüche gebracht ist, zu finden.

Aufl. Der Logarithme ist negativ, und wird gefunden, wenn man des Nenners Logarithmen vom Logarithmen des Zehlers subtrahirt (140 §). Man suche also den Logarithmen des Zehlers nach dem 155 §, dafern man ihn nicht unmittelbar aus den Tafeln haben kan, und subtrahire davon den Logarithmen derjenigen Potenz von 10, welche den Nenner des Bruchs abgiebt.

Verlangt man z. E. den Logarithmen von 0,04738425: so giebt die Rechnung

$$\begin{aligned} l4738425 &= 6{,}6756340 \\ -l10^8 &= -8.0000000 \\ \hline l0{,}04738425 &= -1.3243660 \end{aligned}$$

Es wird demnach $l0{,}1 = -1$; $l0{,}01 = -2$; $l0.001 = -3$ u. s. f. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 0,1 und 0,01 fallen zwischen -1 und -2, und ihre Kennziffer ist -1. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 0,01 und 0,001 fallen zwischen -2 und -3, und ihre Kennziffer ist -2 u. s. f. Weil die Logarithmen der Zahlen von 1 bis an 0,1 zwischen 0 und -1 fallen: so ist ihre Kennziffer -0. Die negativen Logarithmen wachsen nemlich, wenn die zugehörigen Brüche abnehmen.

Bey solchen Rechnungen, wo man die Logarithmen stat der Zahlen selbst gebraucht, ist es oft bequem, blos anzuzeigen, daß der Logarithme des Nenners zu subtrahiren sey, ohne die Subtraction wirklich vorzunehmen, etwa auf die Art $l0{,}04738425 = 6{,}$

$= 6,6756340 - 8$, da man denn mit dem negativen Theil in der Rechnung, wie sonst mit den negativen Grössen umgehet.

157 §.

Die Zahl zu finden, welche einem gegebenen Logarithmo zugehöret, wenn die Characteristik nicht über 6 hinausgeht.

Aufl. Die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1000 kommen in den Tafeln mehr, als einmahl vor, nur mit verschiedenen Kennziffern. Man darf nur erwegen, daß z. E. $l30 = l3 + l10$, $l300 = l3 + l100$, $l3000 = l3 + l1000$ sey, daß ferner z. E. $l230 = l23 + l10$, und $l2300 = l23 + l100$, daß endlich auch z. E. $2430 = l243 + l10$ sey, und daß es sich mit allen Zahlen, die aus einer, zwoen oder dreyen Ziffern bestehen, so verhalte: so wird man gleich wahrnehmen, daß alle Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 1000 auch unter der Kennziffer 3, zwischen 1000 und 10000 wieder vorkommen müssen. Man suche also den gegebenen Logarithmen, ohne seine Kennziffer in Betracht zu ziehen, unter den Logarithmen auf, die 3 zur Kennziffer haben. Findet man ihn genau darunter: so gehört ihm die dabey stehende Zahl zu, wenn man in derselben den Ort der Einer so bestimt, wie es die Characteristik des Logarithmen erfodert. Man schneidet nemlich von den höchsten Ziffern eine mehr ab, als die Characteristik Einheiten hat, so gehört die niedrigste von den abgeschnittenen Ziffern zu den Einern, und die folgenden sind Decimalstellen. Sollte demnach die Characteristik grösser, als 3 seyn: so muß man bey der in den Tafeln neben dem Logarith-

mo stehenden Zahl rechter Hand so viel Nullen setzen, bis die Nullen mit den Ziffern zusammen so viel Stellen ausmachen, als die Characteristik vermöge der Regel verlangt. Hätte man also den Logarithmen 1,8741918: so würde man ihn unter der Kennziffer 3 bey der Zahl 7485 antreffen, und die ihm zugehörige Zahl wäre 74,85. Es ist nemlich $3,8741918 = l7485$, und $2 = l100$, also $1,8741918 = l74,85$ (138 §). Hätte man aber den Logarithmen 6,8741918: so wäre die zugehörige Zahl 7485000, weil $3 = l1000$, und also $l7485 + 3 = l7485000$ ist (136 §).

Findet man den gegebenen Logarithmen nicht genau in den Tafeln: so wird man doch unter der Kennziffer 3 ein paar nach einander zunächst folgende Logarithmen finden, zwischen welchen der gegebene als zwoen Grenzen enthalten ist. Man nimt also die zum nechst kleinern Logarithmen gehörige Zahl, und sucht noch drey dazu gehörige Ziffern, indem man die Regel des 154 § nur umgekehrt anwendet. Es sey 2,5639462 der gegebene Logarithme: so verfährt man auf die Art:

Vom nechst grössern $l3664 = 5639555$
subtr. man den nechst kleinern $l3663 = 5638369$
so ist die Differenz . . 1186

Vom gegebenen 5639462
subtr. man auch den nechst kleinern 5638369
so ist die Differenz 1093

Bey jener Differenz sind die zugehörigen Zahlen um 1 unterschieden, wenn die Kennziffer 3 wäre, also schliest man

1168:

1186 : 1093 = 1 : vierten Zahl.

1093,0000	0,922
1186	
10674	
2560	
1186	
2372	
1880	
1186	

Also wäre die gesuchte Zahl 3663,922, wenn die Kennziffer des Logarithmen 3 wäre. Da also 2 die Kennziffer ist: so ist die gesuchte Zahl 366,3922. Wäre 6 die Kennziffer: so wäre 3663922 die gesuchte Zahl. Warum sich diese Methode beym Gebrauch der gemeinen Tafeln nicht auf grössere Kennziffern als 6 erstreckt, erhellet aus dem 154 und 155 §. Wenn die Kennziffer grösser, als 6 ist: so findet man zwar die ersten 6 bis 7 Ziffern nach dieser Methode richtig, aber mehrere nicht.

Wenn der gegebene Logarithme negativ ist: so ist die zugehörige Zahl ein eigentlicher Bruch, dessen Zehler = 1, und dessen Nenner, die demselben positiv genommenen Logarithmen, zugehörige Zahl ist (140 §). Diesen Bruch findet man leicht auf folgende Art in Decimaltheilen. Zu dem gegebenen negativen Logarithmen addire man eine von den Zahlen 1, 2, 3, u. s. f. die so groß ist, daß die Summe positiv wird. Man suche die der Summe zugehörige Zahl nach den vorhin ausgeführten Regeln, und dividire sie mit einer Potenz von 10, deren Exponent der zum gegebentn Logarithmen addirten Zahl gleich ist, so wäre die zum Logarithmen −3,6253124 gehörige Zahl $= \frac{1}{4220}$. Dies findet man in Decimaltheilen so

$l\,10000 = +4,0000000$
$-3,6253124$

Summa $0,3746876$

die zugehörige Zahl $= 2,369661$. Diese durch 10000 dividirt, giebt die gesuchte $= 0,0002369661$.

158 §.

Es wird der Mühe nicht unwerth seyn, nunmehro noch von der Einrichtung und dem Gebrauch der Sherwinschen Tafeln, nach der Gardinerschen Ausgabe, eine nähere Nachricht zu ertheilen.

Auf den ersten vier Seiten stehen die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 999, wie in andern Tafeln, bey einander, nur ist bey den Logarithmen der Zahlen, die über 100 hinausgehen, die Kennziffer schon weggelassen. Mit der 6ten Seite nimt nun folgende Einrichtung ihren Anfang. Jede Seite ist in 13 Columnen gespalten. In der ersten Columne stehen die Zahlen von oben herunter in natürlicher Ordnung fort, von 1000 bis auf 10099. Hierauf folgen 10 Columnen nach einander. Ueber und unter denselben stehen die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und es hat damit diese Bewandniß. In der ersten dieser Columnen, worüber die 0 stehet, findet man die Logarithmen der zur Linken in der vorigen Columne stehenden Zahlen, aber ohne Kennziffer, die sich allemahl von selbst ergiebt. Nun ist der Logarithme einer Zahl, die aus 5 Ziffern bestehet, vom Logarithmen derjenigen Zahl, die aus den vier höchsten dieser Ziffern bestehet, ausser der Kennziffer in den meisten Fällen nur in den letzten vier Decimaltheilen unterschieden (einige wenige Ausnahmen hievon

von werden unten berühret werden). Hievon ist man gleich überzeuget, wenn man dasjenige erweget, was im 154 und 155 § ausgeführet worden. Hätte man also z. E. die Zahl 47384: so wüste man, daß der Log. davon mit dem Log. 4738 in den ersten drey Decimalstellen übereinkäme, und man dürfte nur die 4 Ziffern kennen, die man statt der 4 letzten nehmen müste, um mit gehöriger Veränderung der Characteristik den L. 47384 zu haben. Diese vier letzten Ziffern nun, welche man bey einer Zahl von 5 Ziffern, statt der vier letzten nehmen muß, die zum Log. gehören würden, wenn die Zahl nur die vier ersten Ziffern hätte, stehen in den 9 Columnen, worüber die Ziffern von 1 bis 9 gesetzt sind, mit dem Log. der Zahl, welche die ersten vier Ziffern hätte, und in der ersten Columne anzutreffen ist, allemahl in grader Linie. Denn es kan die fünfte Ziffer der Zahl nur eine von diesen 9 Ziffern seyn, dafern es nicht die 0 ist.

Man sucht also die vier ersten Ziffern in der ersten Columne auf, und schreibt nur die drey ersten Ziffern des dabey stehenden Logarithmen ab. (Diese drey ersten Ziffern haben allemahl verschiedene nach einander folgende Logarithmen gemein, und deswegen sind sie jedesmahl nur bey dem ersten Log. der diese Ziffern hat, ausgedrückt, und bey den folgenden weggelassen.) Hierauf geht man in die Columne hinein, über welcher die 5te Ziffer der Zahl stehet, und schreibt aus dieser Columne die 4 letzten Ziffern ab, welche in grader Linie mit der Zahl in der ersten Columne stehen, welche aus den vier ersten Ziffern bestehet. So findet man die drey ersten Ziffern des $l 4738 = 675$. Unter der Ziffer 4

die vier letzten = = = = 6317, in der fünften Columne. Also hat man $l\,47384 = 4{,}6756317$.

159 §.

Nach diesen 10 Columnen folgen nun noch zwo andre, als die beyden letzten. Ueber und unter der nechstletzten stehet ein D, als der Anfangsbuchstab des Worts Difference (Unterschied). Ueber der letzten Columne stehet Pts als eine Verkürzung des Worts parts, (theile), und unter derselben Pro, oder das Wort proportional abgekürzt. Mit diesen beyden Columnen hat es folgende Bewandniß.

Sollte man den Log. einer Zahl von 6 Ziffern, z. E. von 473842 suchen: so könnte man nach dem 155 § so verfahren. Man sehe die fünf ersten Ziffern als ganze Zahlen und die letzte als eine Decimalzahl an. Nun nehme man nach voriger Regel aus den Tafeln

$l\,47385 = 6756409$
$l\,47384 = 6756317$
so ist die Differenz 92

Nun müste man schliessen: $1 : 0{,}2 = 92:$ = 18 wird, und zum vierten Zahl, welche $l\,47384$ addirt werden muß. Diese Differenz 92 stehet nun schon in der nechstletzten Columne, und man hat also nicht nöthig sie erst zu suchen. In der letzten, mit der Ueberschrift Pts stehen auch die proportionalen Theile, die man suchet, nachdem die 6te Ziffer eine von den Zahlen 1 bis 9 ist, wie denn die im Exempel gefundene Zahl 18 neben der 2 stehet. Deswegen kan man die Zahlen nur aus den Tafeln etwa so ausschreiben

$l47384 == 6756317$
$2 \quad 18$

$l473842 = 5,6756335$

Hätte die Zahl 7 Ziffern, z. E. 4738425: so übersieht man in den meisten Fällen auf einen Blick, was noch zum Log. der Zahl, die aus den ersten 6 Ziffern bestehet, hinzukommen müste. Die Tafeln zeigen nemlich im vorigen Exempel, wenn die 6te Ziffer 3 wäre, daß die zu addirende Proportionalzahl 28 seyn würde, diese ist um 10 größer, als die nechst vorige 18. Hievon muß man demnach $\frac{5}{10}$, oder $\frac{1}{2}$ nehmen, daß man also den $l4738425$ so erhält

$l47384 == 6756317$
$2 \quad 18$
$5 \quad 5$

Also $l4738425 = 6,6756340$

Dieser Log. komt mit dem im 155 § gefundenen völlig überein. Man kan bey dem letzten Theil, den man wegen der 7ten Ziffer sucht, am kürzesten so verfahren. Man nimt für diesen Theil den 10ten Theil desjenigen Proportionalen Theils, der bey der siebenten Ziffer stehet. Im gegenwärtigen Exempel stehet bey der 5 der proportionale Theil 46, davon ist der 10te Theil 4,6. Dieser ist zwar von dem vorigen um 0,4 unterschieden; allein dergleichen kleine Unterschiede finden sich hier wohl, weil die letzte Ziffer in den proportionalen Theilen bald etwas zu groß, bald etwas zu klein ist. So ist würklich der Unterschied der proportionalen Theile nur 9,2, weil die Differenz 92 auf 10 Ziffern proportionirlich zu vertheilen ist, und er ist vorhin 10 angenommen,

weil er zwischen 18 und 28 so ist. Aber $\frac{5}{10}$ 9,2 = 4,6. Der Grund dieses zuletzt angegebenen Verfahrens fällt leicht in die Augen, wenn man sich die Sache so vorstellet.

Wären die proportionalen Theile in den Tafeln nicht anzutreffen: so müste man mit den zwey letzten Ziffern nach dem 155 § so umgehen. Die Differenz zwischen *l* 47384 und *l* 47385 ist 92. Also müste man schliessen.

1 : 0,25 = 92 : vierten Zahl.

Diese vierte Zahl wäre also $= \frac{92 \times 25}{100} =$

$\frac{92 \times 2}{10} + \frac{92 \times 5}{100}$. Aber $\frac{92 \times 2}{10}$

9,2 × 2 = 18,4 ist der proportionale Theil für die erste Ziffer 2 und $\frac{92 \times 5}{100} = \frac{9,2 \times 5}{10}$. Aber 9,2 × 5 würde der proportionale Theil für die zwote Ziffer 5 seyn, wenn diese Ziffer die 6te wäre, und $\frac{9,2 \times 5}{10}$ ist eigentlich jetzt der proportionale Theil, da 5 die siebente Ziffer ist. Durch eine kleine Ueberlegung der Sache findet man bald, daß dieser Grund allemahl statt habe. Für die Zahl 1648394 findet man demnach so den zugehörigen Logarithmen

l 16483	=	2170363
9		238
4		10,6
l 1648394	=	6,2170361 1

Dies letzte Exempel ist mit Fleiß erwehlet, um eines Umstandes zu erwehnen, der bey der Einrichtung dieser

dieser Tafeln nicht füglich hat vermieden werden können, der aber ungeübte leicht zu falschen Rechnungen verleiten könte. Die Sache ist diese:

Es ist bisher angenommen worden, daß der Logarithme einer Zahl von vier Ziffern vom Logarithmo einer Zahl, welche aus eben den vier Ziffern, nebst noch einer bestehet, ausser der Kennziffer nur in den letzten vier Decimaltheilen unterschieden sey. Es kan sich aber die Verschiedenheit bis auf die fünfte Decimalstelle vom Ende erstrecken, wie denn

z. E. $l\,1648 = 3{,}2169572$

und $l\,1648{,}2 = 3{,}2170099$

wie man aus den kleinen Tafeln nach dem 154 § findet. Nun findet man nach der Regel aus den Sherwinschen Tafeln

$l\,16481 = 2169836$

und wenn man ganz strenge bey der Regel blieb: so würde $l\,16482 = 2160099$ gefunden werden. Aber man sieht gleich, daß dies falsch sey. Es ist eigentlich

$$l\,16482 = 216 + 10099$$

oder $l\,16482 = 2170099$

Man muß also in Fällen von dieser Art die niedrigste von den dreyen ersten Ziffern, die man aus der ersten Columne nimt, um 1 vergrößern, wie denn auch gleich in der folgenden Zeile diese letzte Ziffer um 1 größer seyn wird. Man hat dieses allemahl zu beobachten, wenn die vier letzten Ziffern, die man nach der Regel aus einer der folgenden Columne nehmen müste, zusammen eine kleinere Zahl ausmachen, als die vier letzten Ziffern in der ersten Columne, wovon man nun den Grund leicht einsiehet.

160 §.

160 §.

Hat man nun umgekehrt einen Logarithmen, dessen Kennziffer nicht größer, als 6 ist: so kan man aus den Sherwinschen Tafeln die zugehörige Zahl eben so leicht ohne weitläuftige Rechnung suchen. Es sey der Logarithme 2,5639462 gegeben: so sucht man ihn ohne Rücksicht auf die Kennziffer unter den Logarithmen auf, die mit den dreyen Zahlen 563 anfangen. Vermöge der Einrichtung der Tafeln unterscheiden sich allemahl die drey ersten Ziffern vorzüglich, daß man also mit dem Nachschlagen leicht fertig wird. Fände man nun in einer der Columnen die letzten vier Ziffern die hier 9462 sind, genau: so dürfte man die dazu gehörige aus fünf Ziffern bestehende Zahl nur abschreiben, und den Ort der Einer so setzen, wie es die Characteristik erfodert (152 §). Findet man diese vier letzte Ziffern in den Tafeln nicht genau, wie im Exempel: so nimt man die vier nechst kleinern mit den dreyen ersten gehörig zusammen, und subtrahirt diesen Log. nachdem man die dazu gehörigen 5 Ziffern notirt hat, vom gegebenen Log. und sucht den Rest unter den proportionalen Theilen auf. Findet man den Rest hier genau: so ist die dabey stehende Ziffer die 6te in der gesuchten Zahl: wo nicht, so subtrahirt man den Rest vom nechst kleinern proportionalen Theil, nachdem man die zu diesem gehörige Ziffer für die sechste angenommen. Nun giebt man Acht, ob der zweyte Rest unter den in Gedanken mit 10 dividirten proportionalen Theilen vorkomme, und nimt die dabey stehende Ziffer für die siebente. Mit dem Logarithmen 2,5639462 würde man demnach so umgehen.

Zuge-

Zugehörige Zahlen	36639	2,5639462 gegeb. Logar.
	2	5639436 nechst kleiner.
	2	26 I. Rest
ges. Zahl	3663922	24
		2 II. Rest

Den Ort der Einer setzt man leicht in jedem Fall so, wie es die Characteristik verlangt.

161 §.

Vermittelst der Logarithmen zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden.

Aufl. Nachdem man die Logarithmen dieser dreyen Zahlen aus den Tafeln gefunden hat, addire man die Logarithmen der beyden letzten, und subtrahire von der Summe den Logarithmen der ersten Zahl: so ist der Rest der Logarithme der gesuchten Zahl, die man nun ebenfalls aus den Tafeln findet (136. 138 § vergl. mit dem 175 §. R.)

Auf ähnliche Art kan man also nunmehro zwo oder mehr Zahlen durch Hülfe der Logarithmen in einander multipliciren, oder eine gegebene Zahl durch eine kleinere dividiren.

162 §.

Vermittelst der Logarithmen eine gegebene Zahl auf eine verlangte Potenz zu erheben, oder aus derselben eine Wurzel einer gegebenen Ordnung auszuziehen.

Aufl. Man multiplicire den aus den Tafeln gefundenen Logarithmen der gegebenen Zahl im ersten

Fall mit dem Exponenten der verlangten Potenz, oder dividire diesen Logarithmen im zweeten Fall mit dem gegebenen Wurzel-Exponenten, und suche zum herausgebrachten Log. aus den Tafeln die zugehörige Zahl: so hat man im ersten Fall die verlangte Potenz, und im zweeten Fall die verlangte Wurzel (139 §).

Wenn die Potenz sehr hoch ist, worauf man eine gegebene Zahl erheben soll: so dienet diese Auflösung nur einen ohngefehren Ueberschlag zu machen, wie groß die gesuchte Zahl etwa werden muß, weil die Tafeln, die dem gefundenen Logarithmen zugehörige Zahl nur höchstens bis auf die sieben höchsten Ziffern richtig geben können. So kan man auch durch Hülfe der gemeinen Tafeln die Wurzeln nicht so genau, als man will, finden. Weil man aber in der Ausübung sehr häufig zufrieden seyn kan, wenn man nur die Wurzel bis auf zwey oder drey Decimaltheile richtig herausbringt: so kan in solchen Fällen die gegebene Auflösung mit grossem Vortheile gebraucht werden.

Exempel.

Soll man 2^{100} suchen: so erhält man $l\,2^{100} = 100\,l\,2 = 30{,}1030000$. Also sind die ersten 7 Ziffern der gesuchten Potenz 1267652, und die Characteristik zeigt, daß die Zahl 31 Ziffern haben müsse. Demnach ist die Potenz größer, als eine Quinquillion, und fällt zwischen 1267652^{24} und 1267653^{24}.

Soll man aber $\sqrt[100]{2}$ suchen: so erhält man $l\sqrt[100]{2} = \frac{1}{100}\,l\,2 = 0{,}0030103$ und $\sqrt[100]{2} = 1{,}006955$, oder eigentlich $\sqrt[100]{2} > 1{,}006955$ und $\sqrt[100]{2} < 1{,}006956$.

Eben

Eben so erhält man $lr2 = \frac{1}{2}l2 = 0,1505150$, also $r2 = 1,414213$ (88 §) und $l\overset{3}{r}5 = \frac{1}{3}l5 = 0,2329900$ und $\overset{3}{r}5 = 1,709976$ (107 §).

Hieraus erhellet zugleich, wie sich die Aufgabe des 126 § in Zahlen auflösen lasse, wenn man die Logarithmen-Tafeln zu Hülfe nimt. Soll man das erste von 99 mitlern Proportionalgliedern zwischen 7 und 8436 finden: so ist dieses $= \overset{100}{r}7^{99} \times 8436$ und die Rechnung wird so geführet.

$l7 = 0,8450980$

99

76058820

7605882

$l7^{99} = 83,6647020$

$l8436 = 3,9261366$

$l7^{99} \times 8436 = 87.5908386$

$l\overset{100}{r}7^{99} \times 8436 = 0,8759084$

Also ist die gesuchte Zahl 7,514643. Weil auch eben die gesuchte zwote Zahl $= 7\overset{100}{r}\frac{8436}{7}$ ist: so kan man zuweilen kürzer so rechnen.

$l8436 = 3,9261366$

$l7 = 0,8450980$

$l\frac{8436}{7}$ 3,0810386

$l\overset{100}{r}\frac{8436}{7} = 0,0308104$

gesuchter Logarith. 0,8759084 wie vorhin.

Die letzte Auflösung hätte auch aus dem 165 § der Rechenkunst hergeleitet werden können, und aus

der

der Vergleichung desselben mit dem 126 § der A. R. erhellet nun sehr deutlich, wie Nepper auf die Theorie von den Logarithmen verfallen sey, wenn man das überlegt, was im 144 § davon ist gesagt worden.

163 §.

Nunmehro läst sich füglich eine Vergleichung zwischen den Briggischen und natürlichen Logarithmen (147 §) anstellen. Es war die basis der natürlichen Logarithmen $e = 1,0000001^{10000000}$. Aus Gardiners Tafeln 40 S. hat man den Briggischen Log. von $1000001 = 6,000000043429 42$ etc. und die Vergleichung mit dem Log. von $1000002 = 6,000000086858 80$ etc. zeigt, daß die Voraussetzung des 154 § bis auf die letzte hier ausgedruckte Decimalziffer richtig sey, weil $L\,1000000 = 6$ ist. Also erhält man nach dem 154 § $L\,10000001 = 0,000000043429 42$, wo aber die letzte Ziffer 2 zu klein und statt ihrer 4 zu nehmen ist, wie schärfere Rechnungen zeigen. Also wird $Le = 0,4342944$, und $e = 2,71828$, wo L den Briggischen Logarithmen bedeutet. Ist nun *le* der natürliche Log. von *e*: so hat man $l\,2,71828 = 1$. Wenn aber N jede andre Zahl bedeutet: so ist nach dem 142 § *le*: Le = *l*N: LN, also $LN = \frac{Le}{le} lN = 0,4342944 \times lN$,

und umgekehrt $lN = \frac{1}{0,4342944} LN = 2,302585.$ LN. Wenn man demnach alle Briggische Logarithmen mit der Zahl 0,4342944 dividirt, oder welches einerley ist, mit 2,302585 multiplicirt, so ergiebt

giebt

giebt sich das System der natürlichen Logarithmen. Hätte man aber alle natürliche Logarithmen berechnet: so dürfte man nur alle mit der Zahl 0,4342944 multipliciren, um die Briggischen Logarithmen zu finden. In der höhern Mathematik kommen die natürlichen Logarithmen mehr, als hier in Betrachtung, und man vergleicht daselbst alle übrige Loggarithmen-Systeme mit dem natürlichen. Die Zahl 0,4342944 heist sodann der Modulus der Briggischen Logarithmen, weil sie sich gegen 1 so verhält, wie jeder Briggische Logarithme zum natürlichen Logarithmen eben der Zahl. Eben so ist der Modulus eines jeden andern Systems die Zahl, welche sich gegen 1 so verhält, wie jeder Logarithme dieses Systems zum natürlichen Logarithmen, der zu eben der Zahl gehört. Daher wird der Modulus der natürlichen Logarithmen = 1.

Sollte man nun den natürlichen Logarithmen der Zahl 87265,36 suchen: so hat man

Brigg. Log. 87265,36 = 4,9408419
mult. mit 2,302585

5,8816838
1,48225257
988168
247042
39526
2470

Nat. Log. 87265,36 = 7,37670843

Aber dies ist nicht der Nepersche Log. von 87265,36. Nepper verstehet hiedurch den Log. des Verhält. 87265,36 : 10000000 (146 §). Man suche also zuerst den Brigg. Log. dieses Verh. nach dem 138 §.

Brigg. $l\,87265{,}36 = 4{,}9408419$
Brigg. $l\,10000000 = 7{,}0000000$

Brigg. $l\frac{87265{,}36}{10000000} = -2{,}0591581$

Dieser Brigg. $l\frac{87265{,}36}{10000000} = -2{,}0591581$

mult. mit $2{,}302585$

4,11183162
6177474
41182
10295
1640
100

giebt den nat. $L\frac{87265{,}36}{10000000} = -4{,}7413853$

woraus man durch die Multiplication mit —10000000 den Nepperschen Log. $87265{,}36 = 47413853$ erhält.

Der VIII. Abschnitt.

Von der Auflösung mathematischer Aufgaben durch Gleichungen.

164 §.

Wenn man alle diejenigen Rechnungsfragen, die im XI bis zum XVI Abschnitt der Rechenkunst, unter mancherley Nahmen sind abgehandelt worden, gegen einander hält, und die verschiedenen Wege in Betrachtung ziehet, auf welchen jedesmahl die gesuchten Zahlen sind herausgebracht worden: so erhellet, daß in jedem besondern Fall nur erfodert werde, zu wissen, welche von den vier Rechnungsarten, und in welcher Ordnung sie mit den gegebenen Zahlen vorgenommen werden müssen, um die gesuchten Zahlen zu finden.

Weis man dies Verfahren bey einem gewissen Exempel: so läst sich eben dasselbe Verfahren bey allen ähnlichen Exempeln anbringen. Eine jede Rechnungsaufgabe muß solche Bedingungen enthalten, aus welchen sich beurtheilen läst, in welcher Verbindung die gegebenen Zahlen mit den gesuchten Zahlen stehen, so daß ein Geübter durch eigenes Nachdenken die Regeln herausbringen kan, nach welchen man die gegebenen Zahlen durch die vier Rechnungsarten verändern muß, um die gesuchten herauszubringen. Man kann in solcher Absicht oft verschiedene Wege nehmen, die zu einerley Resultat führen. Allein es komt hier darauf an, die kürze-

sten und leichtesten Wege zu suchen. Deswegen ist es nöthig, auf eine allgemeine Methode bedacht zu seyn, nach welcher man in allen Fällen auf dem kürzesten Wege die Regeln herausbringen könne, die dazu dienen, aus den gegebenen Zahlen die unbekanten zu finden. Diese Methode ist würklich im vorhergehenden bereits verschiedentlich gebraucht worden, und sie soll jetzt auf allgemeine Regeln gebracht werden.

165 §.

Wenn nur eine unbekante Zahl gesucht wird, so muß die Rechnungsaufgabe solche Bestimmungen enthalten, woraus man schliessen kan, wie die unbekante Zahl mit den gegebenen Zahlen müsse verbunden werden, damit eine Zahl herauskomme, die einer andern Zahl gleich ist; da dann die letztere Zahl entweder unmittelbar gegeben seyn kan, oder ebenfalls durch die vier Rechnungsarten erstlich gesucht werden muß. Wenn man nun die unbekante Zahl mit einem willkührlichen Zeichen, als einem Buchstaben des Alphabets x bezeichnet, sodann die Rechnungen, welche nach den Bestimmungen der Aufgabe mit dieser Größe x vorgenommen werden müssen, blos durch die allgemeinen Zeichen der vier Rechnungsarten andeutet; hierauf das Resultat derjenigen gleich setzt, welche die Aufgabe entweder unmittelbar angiebt, oder, welche nach den Umständen der Aufgabe ebenfalls erstlich durch die vier Rechnungsarten gefunden werden muß: so erhält man einen allgemeinen Ausdruck, welcher zwey unterschiedene Zeichen einer, und eben derselben Zahl vermittelst des Zeichens der Gleichheit verbindet. Ein solcher Ausdruck heist eine Gleichung (aequatio). Solche

Glei-

Gleichungen waren $x+\frac{1}{20}x=S$ (232 § Rech.), $x+\frac{n\delta x}{100}=S$ (233 § R.) $y=\frac{(S+U)^n}{S^{n-1}}$ (240 § Rech.)

166 §.

Man kan die gegebenen Zahlen ebenfalls durch willkührliche Zeichen, dergleichen die Buchstaben des Alphabets sind, bezeichnen. Damit man nun die gesuchte Zahl von der gegebenen desto besser unterscheiden könne, ist es eingeführt, jene durch einen von den lezten Buchstaben des Alphabeths z, y, x, u. s. f. Diese aber durch die ersten Buchstaben a, b, c, u. s. w. anzudeuten; da man denn ungleiche Zahlen durch verschiedene, gleiche Zahlen aber mit einerley Buchstaben bezeichnet. Auf solche Art giebt man der Gleichung eine größere Allgemeinheit.

167 §.

Aus einer Gleichung kan man unzehlig viele andre herleiten, wenn man nemlich auf beyden Seiten gleiches addirt, oder subtrahirt, oder auf beyden Seiten mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt. Wenn z. E.

$ax+b=fx+g$ ist

so ist auch $ax=fx+g-b$

oder $ax-fx=g-b$

oder $x=\frac{g-b}{a-f}$ u. s. f.

Wenn auf einer Seite des Gleichheits-Zeichens die unbekante Größe allein stehet, und auf der andern Seite lauter bekante Größen mit einander verbunden

sind: so zeigt die Gleichung unmittelbar an, wie man die unbekante Größe aus den bekanten suchen müsse. So zeigt die letzte Gleichung an, man müsse die Differenzen $g-b$ und $a-f$ suchen, sodann aber jene durch diese dividiren.

168 §.

Die Gleichung, welche unmittelbar aus den Bedingungen einer Aufgabe geschlossen wird, heist die Fundamental-Gleichung der Aufgabe. Wenn nun vorausgesetzt wird, daß in derselben keine höhere Potenz der unbekanten Größe, als die erste, auch kein Wurzelzeichen vorkomme, unter welchem die unbekante Größe befindlich ist: so läst sich daraus allemahl eine andre Gleichung herleiten, worin, wie im vor. §. die unbekante Größe auf einer Seite des Gleichheitszeichens allein stehet, auf der andern Seite aber lauter bekante Größen mit einander verbunden sind.

Die Fundamental-Gleichung einer Aufgabe so verändern, daß auf die eben beschriebene Art die unbekante Größe von den bekanten ganz abgesondert wird, heist die Gleichung auflösen.

169 §.

Unter der, im vor. § vorausgesetzten Bedingung eine Gleichung aufzulösen.

I. Dafern unter den Gliedern der Gleichung Brüche vorkommen: so multiplicire man die ganze Gleichung mit dem Product aller Nenner.

II. Diejenigen ganz bekanten Glieder der Gleichung, welche nun vor dem Gleichheitszeichen stehen, und mit unbekanten Gliedern durch die Addi-

tion

tion oder Subtraction verbunden sind, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen hinter dasselbe.

III. Die Glieder hinter dem Gleichheitszeichen, welche die unbekante Größe enthalten, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen vor dasselbe.

IV. Nun ist das, was vor dem Gleichheitszeichen stehet, ein Product der unbekanten Größe in die Summe aller ihrer bekanten Coefficienten. Demnach dividire man mit dieser Summe der Coefficienten auf beyden Seiten: so ist die Gleichung aufgelöst.

z. E. $\frac{ax}{b} - \frac{ef}{g} = \frac{mx}{n} + c$

$$agnx - befn = bgmx + bcgn$$

$$agnx - bgmx = bcgn + befn$$

oder $(agn - bgm)x = (cg + ef)bn$

also $x = \frac{(cg+ef)bn}{(an-bm)g}$.

170 §.

Dafern nach Anwendung der ersten Regel höhere Potenzen der gesuchten Größe, als die erste herauskommen: so kan man zwar noch die zweyte und dritte Regel anbringen, aber die vierte Regel läst sich nicht weiter anwenden, weil die Voraussetzung, worauf sie sich gründet, nicht mehr statt hat. Ein Exempel von dieser Art wäre

$$x + \frac{a}{xx} + f = h.$$

Hieraus wird nach der I. II und III Regel

$$x^3 + a + fx^2 = hx^2$$
$$x^3 + (f-h)x^2 = -a$$

Wie man nun weiter verfahren müsse, um x zu finden, läst sich hier noch nicht zeigen.

171 §.

Solche Gleichungen, worin die unbekante Größe auf höhern Potenzen, als die erste steigt, werden höhere, auch zusammengesetzte Gleichungen genant, da im Gegentheil die übrigen einfache Gleichungen heissen. Jene kan man wiederum in zwo verschiedene Classen theilen. Komt in allen unbekanten Gliedern der Gleichung eine und eben dieselbe Potenz der unbekanten Größe vor: so heist es eine reine Gleichung. Von der Art wäre $ax^3 + b^4 = fx^3 + c^4$. Kommen aber in der Gleichung verschiedene Potenzen der unbekanten Größe vor, wie im 170 §: so nennt man sie eine unreine Gleichung. Man giebt der reinen Gleichung den Namen einer cubischen biquadratischen Gleichung, einer Gleichung der fünften, der sechsten Ordnung, u. s. w. von der darin enthaltenen Potenz der unbekanten Größe. Eben diese Namen bekommen die unreinen Gleichungen von der höchsten Potenz, worauf in ihnen die unbekante Größe steigt.

172 §.

Eine reine höhere Gleichung aufzulösen, vorausgesetzt, daß man aus jeder Zahl die Wurzel einer gegebenen Ordnung ausziehen könne.

Man gehe mit der Gleichung eben so um, wie mit einer einfachen Gleichung nach dem 169 §, in-

dem

dem man die Potenz der unbekanten Größe als die unbekante Größe selbst ansiehet.

Wenn nun diese Potenz von den bekanten Größen abgesondert ist; und auf der einen Seite des Gleichheitszeichens allein stehet: so ziehe man auf beyden Seiten die Wurzel derjenigen Ordnung aus, welche der Exponent der Dignität der unbekanten Größe anzeigt.

Läst sich diese Wurzel aus dem bekanten Theil der Gleichung nicht würklich ausziehen: so setze man nur das Wurzelzeichen mit dem zugehörigen Exponenten voran.

Exempel.

Es sey $\frac{1}{2}xx - aa = 2ab - \frac{1}{2}xx + bb$.

Dies giebt $xx = aa + 2ab + bb$.

Also ist $x = a + b$.

Wenn $a^5 + x^5 = \frac{fx^5}{g} - h^4$

so wird $a^5g + gx^5 = fx^5 - gh^4$

$(g-f)x^5 = -gh^4 - a^5g$

also $x^5 = \frac{gh^4 + a^5g}{f-g}$

und $x = \sqrt[5]{\frac{gh^4 + a^5g}{f-g}}$.

173 §.

Dafern eine Rechnungs-Aufgabe auf eine solche Gleichung gebracht ist, die man nach dem 169 oder 172 § hat auflösen können: so lassen sich bey würklicher Berechnung der unbekanten Größe, die Logarithmen oft mit vielem Vortheil gebrauchen. Man

nehme z. E. die Gleichung des 240 § R. $y = \frac{(S+u)^n}{S^{n-1}}$.

Hier war $S = 10000$, $u = 500$, wenn 5 p. c. p. anno gerechnet werden. Ist nun $n = 4$: so giebt die Rechnung

$S+u = 10500$ Thl.
$l(S+u) = 4,0211893$
$l(S+u)^4 = 16,0847572$
$l S^3 = 12,0000000$
$l y = 4,0847572$
Also $y = 12155,06$ Thl.

Im 242 § R. war $A = \frac{20^n}{21^n} Z$. Nimt man $n = 4$, $Z = 10000$: so erhält man

$l20 = 1,3010300$
$l20^4 = 5,2041200$
$l Z = 4,0000000$
$l20^4 Z = 9,2041200$
$l21 = 1,3222193$
$l21^4 = 5,2888772$
$l A = 3,9152428$
Also $A = 8227,024$ Thl.

174 §.

Wenn man durch die vier Rechnungsarten, die Addition, Subtraction, Multiplication und Division so allgemeine Operationen verstehet, wie sie im I Absch. sind erkläret worden: so sind es nicht blos arithmetische; sondern auch geometrische Operationen. Wenn die Buchstaben a und b grade Linien bedeu-

bedeuten: so sind auch $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$ grade Linien. Eben dies gilt von den Ausdrücken a^n, b^n, oder auch $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$. Diese Betrachtung macht die Methode, eine Aufgabe durch Gleichungen aufzulösen, so allgemein, daß sie sich nicht allein auf arithmetische; sondern auch auf geometrische Aufgaben anwenden läst. Wenn demnach die Buchstaben in einer Gleichung Linien bedeuten: so zeigt der leßte Ausdruck einer Gleichung, worin die unbekante Größe von den bekanten abgesondert ist, durch welche geometrische Operationen, und in welcher Ordnung die gesuchte Linie aus den gegebenen, und bekanten Linien gefunden werden könne. Hätte man die Gleichung $x = \frac{ab}{c} + f$: so drückt sie aus, daß die Linie x gefunden werde, wenn man zu c, b, a die vierte Proportional-Linie sucht, und dazu die Linie f addirt. Also kan man die Auflösung geometrischer Aufgaben eben so, wie die Auflösung arithmetischer Aufgaben durch Gleichungen suchen. Mit den Gleichungen selbst gehet man bey der Auflösung auf völlig einerley Art um. Nur muß man die Fundamentalgleichung einer geometrischen Aufgabe aus geometrischen Gründen herleiten, und deswegen muß derjenige, welcher diese Methode bey geometrischen Aufgaben in Anwendung bringen will, wenigstens mit den ersten Gründen der Geometrie sich bekant gemacht haben. Um ein Beyspiel solcher Anwendung zu haben, kan folgende Aufgabe dienen.

175 §.

181 F. Es sind die drey Seiten eines Dreyecks ABC gegeben, und aus der Spitze eines Winkels B ist auf die entgegengesetzte Seite AC die senkrechte Linie BD gezogen, man soll finden, wie groß die beyden Stücke AD, und CD dieser Seite AC seyn werden.

Aufl. Man suche zuerst die Fundamentalgleichung der Aufgabe, auf folgende Art. Es sey $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $AD=x$: so ist $CD=AC-AD=b-x$. Vermöge des 111 § G. ist $ABq+ADq=BDq$ und $BCq-CDq=BDq$, folglich wird $BCq-CDq=ABq-ADq$. Braucht man nun die festgesetzten Zeichen: so wird $aa-(b-x)^2=cc-xx$. Dies ist die Fundamentalgleichung der Aufgabe, und ob sie gleich quadratisch zu seyn scheinet: so wird sie doch auf eine einfache gebracht, wenn man das Quadrat $(b-x)^2$ gehörig ausdrückt. Es wird nemlich

$$aa-bb+2bx-xx=cc-xx$$

Also $aa-bb+2bx=cc$

und $2bx=bb+cc-aa$

oder $2bx=bb+(c+a)(c-a)$

folglich $x=\frac{1}{2}b+\frac{(c+a)(c-a)}{2b}$.

Diese Gleichung zeigt, daß x auf folgende Art gesucht werden müsse. Zu $2b$, $c+a$, und $c-a$ suche man die vierte Proportionallinie, und addire sie zu $\frac{1}{2}b$: so ist x gefunden.

Wenn die Seiten des Dreyecks durch Zahlen ausgedrückt sind: so zeigt die Gleichung, wie man die Länge von AD durch Rechnung finden könne.

176 §

176 §.

Weil man alle Größen durch Zahlen ausdrücken kan, wenn die Irrationalzahlen nicht ausgeschlossen werden: so ist diese Methode in der That so allgemein, daß man sie allemahl anwenden kan, wenn aus gegebenen Größen andre unbekante gesucht werden sollen, dafern man nur die Verhältnisse der bekanten Größen gegen einander, und gegen die gesuchte Größe kennet. Deswegen findet diese Methode in allen Theilen der Mathematik ihre Anwendung. Der Hauptkunstgrif, worauf es bey dieser Methode ankomt, beruhet auf folgende Regel:

Man nimt an, die gesuchte Größe sey bereits gefunden; man drückt sie durch ein allgemeines Zeichen aus, verbindet sie hierauf mit den gegebenen Größen so, wie es den Vorschriften der Aufgabe gemäß ist, und schliest daraus rückwärts auf die Veränderungen, die man mit den gegebenen Größen vornehmen muß, wenn die gesuchte herauskommen soll.

177 §.

In der Rechenkunst hat man längst ein völlig ähnliches Verfahren unter dem Namen der Regel Falsi gebraucht. Man hat sie zuerst bey solchen Aufgaben angewandt, bey welchen aus einer gegebenen Zahl eine andre, durch gewisse Operationen gefunden werden soll, die das Verhältniß der gesuchten zur gegebenen Zahl so bestimmen, daß, wenn die gegebene Zahl geändert wird, die gesuchte sich in eben dem Verhältniß ändern muß, und umgekehrt. In Fällen von dieser Art kan man nemlich so verfahren.

Man

Man nehme eine Zahl willkührlich an, und setze, dies sey die gesuchte Zahl. Mit dieser nehme man die vorgeschriebenen Rechnungsarten würklich vor. Komt nun die gegebene Zahl richtig heraus: so hat man die gegebene richtig angenommen. Wo nicht, so schliesse man nach der Regel Detri: wie die herausgebrachte Zahl zur willkührlich angenommenen: so die gegebene Zahl zur gesuchten.

178 §.

Es sey z. E. die Frage diese: eine Zahl ist mit 2 multiplicirt, das Product in 3 dividirt, der Quotient mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, und vom Product $\frac{4}{5}$ genommen worden, dies gab 100: wie groß war jene Zahl?

Diese Zahl soll in $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ multiplicirt, 100 geben. Also ist $1 : \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} =$ ges. Zahl : 100. Sollte die Zahl 200 geben: so erhellet, daß sie zweymahl größer seyn müste u. s. f. Also findet hier die vorhin angenommene Voraussetzung statt.

Man nehme an, die gesuchte Zahl sey 30: so findet sich $30 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = 12$, aber dies sollen 100 seyn, deswegen schliest man, 12 giebt 30, wie viel 100? Antw: $\frac{100 \times 30}{12} = 250$, welches die verlangte Zahl ist.

Setzt man hier den einzigen Umstand hinzu, daß man die gesuchte Zahl mit einem willkührlichen Zeichen, z. E. dem Buchstab x, die mit x vorzunehmende Rechnung aber durch die bekanten allgemeinen Zeichen andeutet: so darf man nur das Resultat $= 100$ setzen, und man hat die Gleichung $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} x = 100$,

$x = 100$, oder $\frac{2}{5}x = 100$, und diese giebt ohne Umweg $x = \frac{5}{2}100 = 250$.

179 §.

Alle zur Gesellschafts- und Vermischungs-Rechnung gehörige Fragen lassen sich auf eben die Art auflösen. Wenn man das Exempel des 244 § vornimt: so siehet man leicht, daß es darauf ankomme, die Zahl 1000 in drey Theile zu theilen, so, daß der zweyte $1\frac{1}{2}$ mahl größer, als der erste, und der dritte 8 mahl größer, als der erste sey. Ist x der gesuchte kleinste Theil: so hat man $x + \frac{3}{2}x + 8x = 1000$, und diese Gleichung giebt $2x + 3x + 16x = 2000$, oder $21x = 2000$, also $x = \frac{2000}{21} = 95\frac{5}{21}$, wie im 244 § R.

Wollte man nach der Regel Falsi für den kleinsten Theil willkührlich die Zahl 40 nehmen: so erhielte man $40 + \frac{3}{2}40 + 8 \times 40 = 420$. Es sollen aber 1000 seyn. Also schliest man

$$420 : 40 = 1000 : \frac{40 \times 1000}{420} = 95\frac{5}{21}.$$

Man siehet leicht, daß sich diese Regel Falsi nur in allen solchen Fällen anbringen lasse, da die in der Aufgabe liegende Gleichung auf die Form gebracht werden kan $Ax = B$, wo A wie man will, aus gegebenen Zahlen zusammengesetzt, und B die Zahl ist, der das Resultat zuletzt gleich werden soll, nachdem die gesuchte vorgeschriebener Maaßen ist verändert worden. Jetzt ist sie von keinem erheblichen Nutzen, da man die gesuchte Zahl aus der Gleichung selbst viel kürzer herausbringt.

180 §.

Wenn aber die Gleichung so herauskomt $Ax + D = B$,

$=B$, wo B die Zahl bedeutet, welcher das letzte Resultat gleich werden soll, nachdem mit der gesuchten Zahl die vorgeschriebenen Rechnungen angestellet worden; so läst sich die Regel Falsi nur mit gewissen Veränderungen anbringen, die hier die Rechnung noch weitläuftiger machen.

Um hievon einen Begrif zu geben, setze man es sey x willkührlich $=f$ gesetzt, und durch gehörige Rechnung $Af+D=F$ gefunden worden. Es sey ferner $x=g$ gesetzt, und $Ag+D=G$ gefunden. Nun schliesse man: Es ist

$$\begin{array}{l} Af+D=F \\ Ag+D=G \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} Af+D=F \\ Ax+D=B \\ \hline \end{array}$$

also $A(f-g)=F-G$. Also $A(f-x)=F-B$.
Weil nun $A(f-g):A(f-x)=(f-g):(f-x)$; so ist auch $F-G:F-B=f-g:f-x$ und aus dieser letzten Proportion ergiebt sich $f-x$, folglich x selbst; denn es wird $f-x=\frac{(F-B)(f-g)}{F-G}$ also $x=f-\frac{(F-B)(f-g)}{F-G}$.

Dies Verfahren nennt man die doppelte Regel Falsi, weil man hier zwey willkührliche Voraussetzungen annehmen muß, um die gesuchte Zahl herauszubringen, da dann das Verfahren des 177 § die einfache Regel Falsi genannt wird.

Alle Fragen, die nach der einfachen Regel zu berechnen sind, kan man auch nach der doppelten berechnen, aber nicht umgekehrt. Man brauchte also ehedem die doppelte Regel Falsi nur in solchen Fällen, wenn die einfache nicht hinreichte. Daher gehören zur einfachen Regel Falsi alle diejenigen Aufgaben,

bey

bey welchen die gesuchte Zahl durch andre gegebene Zahlen nach einander multiplicirt, oder dividirt werden soll, ohne daß zu den kommenden Producten und Quotienten eine bekante Zahl addirt; oder davon subtrahirt werden muß. Wenn das letzte erfodert wird: so muß die doppelte Regel Falsi gebraucht werden, es sey denn, daß man das addirte, oder subtrahirte vor der Rechnung leicht auf beyden Seiten wegnehmen, oder wieder zusetzen kan, da denn die Frage auf die einfache Regel Falsi gebracht ist.

181 §.

Es sind diese beyde Arten der Regel Falsi hier nur deswegen beschrieben, damit man wahrnehmen möge, wie die mathematische Erfindungskunst nach und nach zu ihrer jetzigen Vollkommenheit gediehen ist, und wie ungemein grosse Vorzüge die Methode der Gleichungen vor den sonst bekanten ältern Methoden voraus habe, die alle nur auf specielle Fälle eingeschränkt, und oft ziemlich weitläuftig waren, wie denn die doppelte Regel Falsi von dem letztern ein Beyspiel abgiebt. Wer sich die Methode der Gleichungen geläufig gemacht hat, wird nie nöthig haben diesen Umweg zu nehmen. Um inzwischen auch hievon ein Exempel zu haben, setze man, es sey folgende Frage vorgelegt: Eine Zahl ist mit 2 multiplicirt, zu dem Product 60 addirt, die Summe durch 11 dividirt, vom Quotienten 15 subtrahirt, und der Rest in $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, dies gab 100, wie groß war die erste Zahl?

Man erhält ohne Weitläuftigkeit die Gleichung

$$\left(\frac{2x+60}{11} - 15\right) \times 2\tfrac{2}{9} = 100$$

und hieraus schließt man

$(2x+60-11\times 15)\times 2\frac{2}{9}=1100$

oder $(2x+60-165)\times \frac{20}{9}=1100$

also $40x+1200-3300=9900$

und $40x=9900+3300-1200$

d. i. $40x=12000$

und $x=\frac{12000}{40}=300.$

Nach der doppelten Regel Falsi setze man, es sey die gesuchte Zahl

entweder			oder		
$410=f$			$80=g$		
mult. 2			mult. 2		
820			160		
add. 60			add. 60		
880		80	220		20
div. 11	subtr.	15	div. 11	subtr.	15
88		65	22		5
00	mult.	$2\frac{2}{9}$	00	mult.	$2\frac{2}{9}$
		$144\frac{4}{9}=F$			$11\frac{1}{9}=G$
sollen 100 seyn			sollen 100 seyn.		

Setzt man nun $100=B$; so ist $F-G:F-B=f-g:f-x$ d. i. $133\frac{3}{9}:44\frac{4}{9}=330:f-x$, oder $1200:400=330:f-x$; also $f-x=\frac{400\times 330}{1200}=110$. Dies giebt $x=f-110=300$, wie vorhin.

Aber wie groß ist nicht dieser Umweg gegen die vorige ungemein kurze und bündige Methode!

Alle Aufgaben, die zur zweyten Classe der Alligations-Rechnungsfragen gehören (253 § R.) lassen sich durch die doppelte Regel Falsi auflösen, wie man leicht

leicht aus Vergleichung der Gleichung $fN-(f-g)y=S$ des 262 § R. mit dem allgemeinen Ausdruck $Ax+D=B$ im 180 § übersieht. Aber, wer wollte hier, und in unzähligen ähnlichen Fällen einen langweiligen und beschwerlichen Umweg einer kurzen und leichten Methode vorziehen?

182 §.

Soll mehr, als eine unbekante Größe gefunden werden: so läst sich die Methode der Gleichungen mit eben dem Vortheil anwenden. Alle hieher gehörige Aufgaben aber, bey welchem mehr, als eine unbekante Größe gesucht wird, lassen sich in zwo Classen bringen. Eine Aufgabe von dieser Art enthält nemlich entweder so viele Bestimmungen, daß sich daraus eben so viele Gleichungen herleiten lassen, als unbekante Größen gesucht werden, oder es folgen aus den Bedingungen der Aufgabe nicht so viele Gleichungen. Eine Aufgabe von der ersten Art heist eine bestimte, und von der zweyten Art, eine unbestimte Aufgabe. So war die Aufgabe des 262 § R. eine bestimte, weil sie auf zwo Gleichungen $x+y=N$, und $fx+gy=S$ führte, und zwo unbekante Zahlen gesucht werden sollten. Dagegen war die Aufgabe des 263 § R. eine unbestimte. Sie führte nur auf zwo Gleichungen $x+y+z=N$, und $fx+gy+hz=S$, da man doch drey unbekante Größen hatte.

183 §.

Eine Gleichung, welche ausser den bekanten Grössen nur eine unbekante Größe enthält, heist eine bestimte Gleichung, wie z. E. $fN+(g-f)y=S$ im 262 § R. war. Eine Gleichung aber die ausser

den bekanten Größen mehr, als eine unbekante enthält, heist eine unbestimte Gleichung, wie z. E. $fx+gy=S$ (262 §R.) $fx+gy+hz=S$ (263 §R.) Die Ursache dieser Benennungen fällt leicht in die Augen. Eine Gleichung bestimt nemlich den Werth einer unbekanten Größe völlig, wenn sie nicht mehr unbekante Größen enthält. Aus $fN+(g-f)y=S$ folgt $y=\frac{S-fN}{g-f}$: aber eine Gleichung, die mehr, als eine unbekante Größe enthält, bestimt keine derselben. Eine Gleichung zwischen zwo unbekanten Größen zeigt nur, wie eine von der andern abhängt, und wie die eine gefunden werden könne, wenn die andre entweder willkührlich angenommen, oder sonst durch andre Gründe bestimt wird. Aus $fx+gy=S$ folgt $y=\frac{S-fx}{g}$, wo y nicht bestimt ist, weil man die Größe von x nicht weiß. Eine Gleichung zwischen drey unbekanten Größen bestimt eine davon nur unter der Bedingung, wenn die übrigen beyden entweder willkührlich angenommen, oder durch andre Gründe bestimt werden. Aus $fx+gy+hz=S$ folgt $z=\frac{S-fx-gy}{h}$, wo man nicht wissen kan, wie groß z sey, bevor x und y bestimt sind. So bestimt jede Gleichung, wenn sie auch noch mehr unbekante Größen enthält, allemahl nur eine, unter der Bedingung, daß die übrigen durch andre Gründe bestimt werden.

184 §.

Aus zwoen unbestimten Gleichungen zwischen zwoen unbekanten Größen, eine unbekante Größe

wegschaffen (eliminare incognitam) heist, aus beyden Gleichungen eine dritte bestimte Gleichung herleiten, welche nur die andre unbekante Größe allein enthält.

Aus zwoen einfachen Gleichungen zwischen x und y eine unbekante Größe x wegzuschaffen.

1. Aufl. Man sehe die andre Größe y als bekant an, und suche aus jeder Gleichung den Werth von x nach dem 169 §. Man setze beyde Werthe einander gleich: so hat man eine bestimte Gleichung, die nur y enthält.

Z. E. Aus den Gleichungen

$x+y=N$, und $fx+gy=S$

folgt

$x=N-y$, und $x=\frac{S-gy}{f}$

Also wird $N-y=\frac{S-gy}{f}$

oder $fN-fy=S-gy$

2. Aufl. Nachdem der Werth von x aus einer Gleichung geschlossen ist, kan man denselben auch statt x in die andre Gleichung setzen, ohne vorher diese letzte Gleichung zu verändern. So kan man im vor. Exempel den Werth $x=N-y$ sogleich in die andre Gleichung $fx+gy=S$ setzen, und man erhält $f(N-y)+gy=S$, oder $fN-fy+gy=S$, welches $fN-fy=S-gy$, wie vorhin giebt.

Wenn die eine Gleichung verwickelter als die andre ist: so kan man mit Vortheil die letzte Art gebrauchen, wenn zuerst aus derjenigen Gleichung, welche am wenigsten verwickelt ist, der Werth von x gesucht wird.

3. Aufl. Man kan beyde Gleichungen allemahl so verändern, daß sie unter folgenden allgemeinen Ausdrücken begriffen sind

$$ax+by=c$$
$$fx+gy=h$$

wo a, b, c, f, g, h aus den bekanten Größen, wie man will, zusammengesetzt seyn können. Will man nun x wegschaffen: so multiplicire man jede Gleichung mit dem Coefficienten, worin x in der andern Gleichung multiplicirt ist. Auf die Art erhält man

$$afx+bfy=cf$$
$$afx+agy=ah$$

Nun subtrahire man eine Gleichung von der andern: so wird

$$(bf-ag)y=cf-ah$$

oder auch $(ag-bf)y=ah-cf$.

Wäre $by+ax=c$
$gy-fx=h$

so erhielte man

$$-bfy-afx=-cf$$
$$agy-afx=ah$$

und $(ag+bf)y=ah+cf$.

Wollte man die erste Gleichung nicht mit $-f$, sondern mit $+f$ multipliciren: so müste man die beyden neuen Gleichungen addiren um x wegzuschaffen.

185 §.

Aus mehr denn zwo einfachen Gleichungen zwischen eben so viel unbekanten Größen z, y, x u. s. f., als man Gleichungen hat, alle übrige bis auf eine z wegzuschaffen.

Aufl. Man setze, es sind die drey Gleichungen

$$x+y=a,$$

$x+y=a$, $x+z=b$, $fx+gy=z$

zwischen den unbekannten Größen x, y, z gegeben.

Aus den beyden ersten $x+y=a$, $x+z=b$, schaffe man nach dem vorigen § die Größe x weg; so erhält man $a-y=b-z$.

Aus einer der beyden ersten z. E. $x+z=b$, und der dritte $fx+gy=z$ schaffe man ebenfalls x weg: so ergiebt sich $b-z=\frac{z-gy}{f}$.

Aus dieser Gleichung mit der vorigen $a-y=b-z$ verbunden, schaffe man y weg: so erhält man $a+z-b=\frac{(f+1)z-bf}{g}$, oder $(a-b)g+gz=(f+1)z-bf$ und diese Gleichung enthält allein z.

Daß diese Methode sich auch auf mehr Gleichungen, so viel man will, erstrecke, fällt leicht in die Augen.

186 §.

Eine bestimte Aufgabe aufzulösen.

Aufl. Man leite so viel Gleichungen, als unbekante Größen, z, y, x u. s. f. zu suchen sind, aus den Bedingungen der Aufgabe her. Wenn dies nicht angehet: so ist es keine bestimte Aufgabe.

Aus diesen Gleichungen schaffe man alle unbekante Größen bis auf eine z weg, und leite aus der letzten Gleichung den Werth der darin enthaltenen unbekanten Größe z her; nach dem 169 §

Unter den Gleichungen, die auf die letzte geleitet haben, werden solche seyn, die ausser z noch eine der unbekanten Größen x oder y enthalten. In dieser setze man den Werth von z: so erhält man x oder y aus dem 169 §.

Man gehe weiter zurück auf die Gleichungen, die ausser einer der beyden vorigen, oder allen beyden noch die dritte enthalten, und verfahre wie vorhin: so erhält man den Werth der dritten. Es ist offenbar, daß man auf solche Art noch weiter zurück gehen, und die Werthe aller unbekanten Größen durch lauter bekante ausdrücken könne.

Im 262 § R. hatte man

$$x+y=N, \text{ und } fx+gy=S$$

Dies gab $fN-fy=S-gy$

also wird $y=\frac{S-fN}{g-f}$

und $x=N-\frac{S-fN}{g-f}$.

Im 185 § hatte man

$$x+y=a,\ x+z=b,\ fx+gy=z$$

Dies gab $(a-b)g+gz=(f+1)z-bf$

also wird $z=\frac{(a-b)g+bf}{f+1-g}$

folglich $x=b-\frac{(a-b)g+bf}{f+1-g}=\frac{b-ag}{f+1-g}$.

Ferner wird $y=a-\frac{b-ag}{f+1-g}$

oder $y=\frac{(f+1)a-b}{f+1-g}$.

187 §.

Bey dieser Auflösung mathematischer Aufgaben durch Gleichungen ist nun nachfolgender Umstand vor-

vorzüglich in Betrachtung zu ziehen. Man will entweder blos wissen, wie groß die gesuchte Größe sey? oder man will zugleich ihre besondre Beziehung gegen eine andre kennen, ob sie ihr nemlich entgegengesetzt, oder nicht entgegengesetzt sey. Sucht man z. E. bey einer geometrischen Aufgabe eine Linie: so will man nicht allein ihre Größe; sondern auf ihre Lage kennen. Dies letztere ergiebt nun das Zeichen (+) oder (−) vor dem Ausdruck der gesuchten Größe, und die Umstände der Aufgabe ergeben es allemahl, was das Zeichen (−) vor dem Ausdruck der gesuchten Größe für eine Bedeutung habe. Bey Herleitung der Fundamentalgleichung sieht man gewöhnlich die unbekante Größe, als positiv an. Wenn nun nach gehöriger Rechnung das Zeichen (−) voran komt: so zeigt es an, daß die Aufgabe eine solche Größe verlange, welche derjenigen entgegengesetzt ist, die anfangs als die gesuchte ist angenommen worden.

188 §.

Die Aufgabe des 175 § wird diese Sache völlig erläutern. Man suchte das Stück AD auf der Seite AC des Dreyecks ABC zwischen A und der lothrechten Linie BD. Man setzte voraus, daß der Durchschnittspunct D rechter Hand des Puncts A falle, und dies gab für $AD = x$ den Ausdruck 181 F.

$$x = \tfrac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$$

oder $x = AE + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$, wenn $AE = \tfrac{1}{2}b$ ist.

Dafern $a > c$, d. i. BC > AB ist: so wird $c - a$,

also auch $\frac{(c+a)(c-a)}{2b}$ negativ, und $x = AE - \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$. Also muß man nun $ED = \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$ nicht nach der Rechten; sondern der linken Seite von E auftragen, wie in der 182 F.

182 F. Wäre nun auch $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} > \frac{1}{2}b$ d. i. $ED > AE$: so würde $x = AE - ED$ negativ herauskommen. Der Punct D würde nemlich nun linker Hand von A fallen, wie in der 183 F, unter welchen Umständen dies geschehen werde, läst sich so beurtheilen.

183 F. Es muß $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} > \frac{1}{2}b$ seyn, also $(a+c) \times (a-c) > bb$, d. i. $aa - cc > bb$, oder aa muß größer als $bb + cc$, d. i. $BC^2 > AC^2 + AB^2$ seyn. Aber unter dieser Bedingung ist der Winkel BAC stumpf (112 § G.). Also folgt rückwärts, wenn BAC stumpf ist, daß AD nicht auf eben der Seite von A falle, dahin diese Linie fällt, wenn BAC spitz ist. Für BAC = R ist $aa = bb + cc$, also $aa - cc = bb$, oder $(a+c)(a-c) = bb$, und $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} = \frac{1}{2}b$. Dies giebt AD = 0, und daß dies alles richtig sey, weiß man aus geometrischen Gründen.

Eine einfache bestimte Gleichung giebt also jedesmahl einen bestimten Werth der unbekanten Grösse, nicht mehrere, und dieser Werth ist nach Beschaffenheit der Umstände entweder positiv, oder negativ. Mit den höhern Gleichungen aber verhält es sich anders, wie die folgende Ausführung zeigen wird.

189 §.

189 §.

Wenn der Unterschied positiver und negativer Grössen in Betrachtung komt: so hat jedes positive Quadrat zwo unterschiedene Wurzeln, die zwar in Ansehung der Grösse einerley, einander aber entgegen gesetzt sind.

Beweis. Es ist $+a \times +a = +a^2$, also $+a = \sqrt{+a^2}$, aber es ist auch $-a \times -a = a^2$, also auch $-a = \sqrt{+a^2}$ (44 §). Es sind nemlich nicht nur $+a$ und $+a$; sondern auch $-a$ und $-a$ gleiche Factoren, die das Product $+a^2$ herstellen (19 §).

Eben dies erhellet aus folgenden Gründen. Die Quadratwurzel ist nichts anders, als die mittlere Proportionalgrösse zwischen der Einheit und dem Quadrat. Aber die Einheit wird allemahl positiv genommen (21 §), und es ist nicht nur $+1 : +a = +a : +a^2$; sondern auch $+1 : -a = -a : +a^2$ (18§). Demnach giebt es zwischen $+1$ und $+a^2$ zwo einander entgegengesetzte mittlere Proportionalgrössen, d. i. $+a^2$ hat zwo entgegen gesetzte Quadratwurzeln.

190 §.

Wenn ein Ausdruck verlangt, daß eine Grösse durch solche Operationen herausgebracht werden solle, die mit einander nicht bestehen können: so heist die Grösse, welche er bezeichnet, eine unmögliche Grösse.

Die Quadratwurzel aus einem negativen Quadrat, ist eine unmögliche Grösse.

Beweis. Es kan $\sqrt{-a^2}$ weder eine positive, noch negative Grösse seyn. Wäre $\sqrt{-a^2} = +a$, so wäre $-a^2 = +a \times +a = +a^2$, und wenn $\sqrt{-a^2} = -a$ wäre: so müste $-a^2 = -a \times -a = +a^2$ seyn,

seyn, welches beydes dem 19 § entgegen ist. Man kan auch nicht $\gamma - a^2 = 0$ setzen, es müste denn $a^2 = 0$ seyn, welches hier aber gegen die Voraussetzung ist. Demnach ist es nicht möglich, aus $-a^2$ eine Quadratwurzel anzugeben, und der Ausdruck $\gamma - a^2$ bezeichnet eine unmögliche Grösse.

Dies erhellet wiederum auch daraus, weil $\gamma - a^2$ zwischen $+1$, und $-a^2$ die mittlere Proportionalgrösse seyn müste. Aber sowol $+1 : +a = +a : -a^2$, als auch $+1 : -a = -a : -a^2$ sind falsche Proportionen (18 §).

191 §.

Dies alles wird in sein völliges Licht gesetzet, wenn man die Quadratwurzel durch die Geometrische Verzeichnung (216 §. G.) sucht. Es sey BE
179 F. $= +1$, und $ED = +a^2$; mit dem Halbmesser BC $= \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(1+a^2)$ sey aus C ein Kreis beschrieben, und durch E auf BD eine senkrechte Linie gesetzt, die den Kreis schneidet: so ist das Stück zwischen E und dem Durchschnittspunkt mit dem Kreise die gesuchte Wurzel aus a^2. Aber es giebt zweene Durchschnittspuncte A und F; demnach ist sowol EA, als auch $EF = -EA$ die gesuchte Wurzel.

180 F. Nimt man ED negativ, so daß $BD = BE - ED = 1 - a^2$ wird: so kan der aus C mit dem Halbmesser $CB = CD$ beschriebene Kreis die durch E gezogene senkrechte Linie gar nicht schneiden, und es fällt in die Augen, daß beyde Wurzeln unmöglich werden.

192 §.

Jede reine quadratische Gleichung giebt zweene Werthe für die unbekante Grösse, die entwe-

entweder beide möglich, oder beide unmöglich sind.

Beweis. Wenn das Quadrat der unbekannten Grösse von den bekanten Grössen nach den Regeln des 172 § abgesondert ist: so läst sich die Gleichung überhaupt so ausdrücken $x^2 = A$, wo A entweder positiv, oder negativ seyn wird.

Es sey zuerst $x^2 = +A$: so ist sowol $x = +\sqrt{A}$, als auch $x = -\sqrt{A}$ (189 §), und beide Werthe sind möglich. Die beiden letzten Gleichungen ziehet man der Kürze wegen in folgenden Ausdruck zusammen $x = \pm\sqrt{A}$

Es sey $x^2 = -A$: so ist dies so viel, als $x^2 = +A \times -1$, also $x = \pm\sqrt{A} \times \sqrt{-1}$, wo $\pm\sqrt{A}$ die beiden möglichen Wurzeln von $+A$ sind, und $\sqrt{-1}$ ein unmöglicher Factor ist (190 §). Also ist auch $x = \pm\sqrt{-A}$ (48 §), oder x hat zwey unmögliche Werthe.

193 §.

Wenn a eine positive Grösse ist: so sind alle ihre Dignitäten positiv, der Exponent mag eine grade, oder ungrade Zahl seyn. Wenn aber $-a$ eine negative Grösse ist: so sind zwar alle ihre Dignitäten, die grade Exponenten haben, auch positiv; aber diejenigen Potenzen von $-a$ sind alle negativ, deren Exponent eine ungrade Zahl ist. Es ist nemlich

$(-a)^{2n} = \left((-a)^2\right)^n = (+a^2)^n = +a^{2n}$, aber

$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \times -a = +a^{2n} \times -a = -a^{2n+1}$.

194 §.

Jede reine Gleichung, die zu einer graden Ordnung gehört, giebt entweder zwey einander

der entgegengesetzte für sich gleiche mögliche Werthe der unbekannten Grösse, oder gar keinen möglichen Werth.

Beweis. Man kan die Vergleichung nach dem 172 § auf diesen Ausdruck bringen $x^{2n}=A$, wo A entweder positiv, oder negativ ist. Es sey zuerst $x^{2n}=+A$: so kan nicht allein $x=+\sqrt[2n]{r}A$; sondern auch $x=-\sqrt[2n]{r}A$ seyn. Denn es ist nicht allein $(+\sqrt[2n]{r}A)^{2n}$; sondern auch $(-\sqrt[2n]{r}A)^{2n}=+A$ (193 §). Ist aber $x^{2n}=-A$: so ist dies so viel, als $x^{2n}=+A\times-1$, also wird $x=\pm\sqrt[2n]{r}A\times\sqrt[2n]{r}-1$, wo $\sqrt[2n]{r}-1$ ein unmöglicher Factor ist. Denn wäre $\sqrt[2n]{r}-1=R$, und R eine mögliche Grösse; so müste auch $\sqrt[2]{r}-1=R^n$ eine mögliche Grösse seyn, welches dem 190 § entgegen ist. Also sind sind beide Werthe unmöglich.

195 §.

Jede reine Gleichung einer ungraden Ordnung giebt einen möglichen Werth der unbekannten Grösse, nicht mehrere.

Beweis. Eine solche Gleichung läst sich so ausdrücken $x^{2n+1}=A$, und A ist entweder positiv, oder negativ. Aus $x^{2n+1}=+A$ folgt $x=+\sqrt[2n+1]{r}A$, und aus $x^{2n+1}=-A$ folgt $x=-\sqrt[2n+1]{r}A$ (193 §).

196 §.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Grösse unter einem Wurzelzeichen stehet; die Gleichung so zu verändern, daß die unbekannte Grösse unter keinem Wurzelzeichen bleibe.

Aufl. Wenn nur ein Wurzelzeichen vorkomt: so bringe man die Grösse mit dem Wurzelzeichen auf der einen Seite des Gleichheitszeichens allein, und die übrigen Theile der Gleichung auf die andere Seite. Man mache auf beiden Seiten die Potenz, deren Exponent dem Wurzel-Exponenten gleich ist: so fällt das Wurzelzeichen weg.

Z. E. Es sey $a+\sqrt{(bb+xx)}=fx+g$; so wird $\sqrt{(bb+xx)}=fx+g-a$, und $bb+xx=ffxx+2fgx-2fax+(g-a)^2$.

Man kan auf solche Art nicht mehr als ein Wurzelzeichen auf einmal wegschaffen. Wenn demnach die Gleichung mehr, als ein Wurzelzeichen enthält: so muß man dieselbe Methode wiederholen, und man wird auf solche Art ein Wurzelzeichen nach dem andern wegschaffen können.

Wenn in der Fundamental-Gleichung einer Aufgabe die unbekante Grösse unter einem oder mehrern Wurzelzeichen stehet: so muß man diese Wurzelzeichen vor allen Dingen zuerst wegschaffen, damit man beurtheilen könne, zu welcher Ordnung die Gleichung gehöre. So zeigte dies Verfahren, daß die letzte Gleichung eine quadratische sey.

197 §.

Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Es sey z. E. die vorige Gleichung $bb+xx=ffxx+2fgx-2afx+(g-a)^2$ gegeben. Man bringe

bringe alle die Theile der Gleichung, welche x enthalten, auf die eine, die völlig bekannten Theile auf die andere Seite des Gleichheitszeichens: so erhält man im Exempel $ffxx+2fgx-2afx-xx=bb-(g-a)^2$.

Man ordne die unbekanten Theile auf der einen Seite so, daß zuerst alle diejenigen stehen, welche xx enthalten, und hierauf die übrigen folgen, worin x vorkomt. Die vorige Gleichung wird demnach so geordnet: $ffxx-xx+2fgx-2afx=bb-(g-a)^2$.

Nun bestehet die unbekante Hälfte der Gleichung aus zweenen Theilen, und davon ist der erste ein Product aus xx in die Summe aller bekanten Coefficienten von xx, der andre aber ein Product aus x in die Summe aller Coefficienten von x. Also drücke man die beiden Theile diesem gemäß aus. Die vorige Gleichung ist demnach so auszudrücken:

$$(ff-1)xx+(2fg-2af)x=bb-(g-a)^2.$$

Mit dem nunmehrigen Coefficienten von xx dividire man die ganze Gleichung. Auf die Art erhält man aus der letzten Gleichung diese

$$xx+\frac{2f(g-a)}{ff-1}x=\frac{bb-(g-a)^2}{ff-1}.$$

Jede quadratische Gleichung läst sich demnach so verändern, daß die ganze Gleichung nur aus dreyen Theilen besteht, wovon der erste das Quadrat der unbekanten Grösse ist, der zweyte ein Product eines bekanten Coefficienten in die unbekante Grösse, der dritte aber eine völlig bekante Grösse. Also sind alle quadratische Gleichungen unter dem allgemeinen Ausdruck $xx+Px=Q$ enthalten, wenn P und Q bekante

Grössen

Grössen bedeuten, die in jedem besondern Fall nach den vorigen Regeln gefunden werden. So wäre im vorigen Exempel $P = \frac{2f(g-a)}{ff-1}$, und $Q = \frac{bb-(g-a)^2}{ff-1}$.

Nach dieser Vorbereitung addire man das Quadrat des halben Coefficienten von x auf beyden Seiten, nemlich $\frac{1}{4}PP$: so wird

$$xx+Px+\tfrac{1}{4}PP=Q+\tfrac{1}{4}PP.$$

Dies ist nun als eine reine quadratische Gleichung anzusehen, weil $xx+Px+\frac{1}{4}PP=(x+\frac{1}{2}P)^2$ ist, und also $(x+\frac{1}{2}P)^2=Q+\frac{1}{4}PP$ wird.

Hieraus folgt $x+\frac{1}{2}P=\pm r(Q+\frac{1}{4}PP)$ (192§) und dies giebt ferner

$$x=-\tfrac{1}{2}P\pm r(Q+\tfrac{1}{4}PP).$$

Im vorigen Exempel würde man also

$$x=\frac{f(a-g)}{ff-1}\pm r\left(\frac{bb-(g-a)^2}{ff-1}+\frac{ff(g-a)^2}{(ff-1)^2}\right)$$

erhalten.

198 §.

Die Werthe der unbekanten Größe in den reinen höhern Gleichungen wurden durch Ausziehung der Wurzeln gefunden (194. 195 §) und diese Werthe lassen sich selten anders, als durch Wurzelgrößen ausdrücken. Die Werthe der unbekanten Größe, welche eine unreine quadratische Gleichung bestimt, können ebenfalls nicht ohne Ausziehung einer Wurzel gefunden werden (197 §) und lassen sich auch nur in speciellen Fällen ohne Wurzelzeichen ausdrücken.

Daß es mit den übrigen höhern Gleichungen eben die Bewandnis haben werde, läst sich schon zum voraus absehen. Dies ist die Ursache, weswegen die Werthe der unbekanten Größe, welche man aus einer höhern Gleichung eigentlich sucht, die Wurzeln dieser Gleichung genant werden.

199 §.

Jede unreine quadratische Gleichung $xx + Px = Q$ hat also wenigstens zwo Wurzeln, nemlich $x = -\frac{1}{2}P + \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$ und $x = -\frac{1}{2}P - \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$ die beyde ungleich groß sind: mehrere aber nicht. Wären α, β Wurzeln dieser Gleichung, und überdem γ eine dritte von den vorigen verschiedene Wurzel: so müsten diese drey Gleichungen richtig seyn

$$\alpha\alpha + P\alpha = Q$$
$$\beta\beta + P\beta = Q$$
$$\gamma\gamma + P\gamma = Q$$

Aus den beyden ersten folgt $\alpha\alpha + P\alpha = \beta\beta + P\beta$, und aus den beyden letzten $\beta\beta + P\beta = \gamma\gamma + P\gamma$. Jene Gleichung giebt $(\alpha - \beta)P = \beta\beta - \alpha\alpha$, und $P = -\frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{\alpha - \beta} = -(\alpha + \beta)$. Diese giebt $(\beta - \gamma)P = \gamma\gamma - \beta\beta$ und $P = -\frac{\beta\beta - \gamma\gamma}{\beta - \gamma} = -(\beta + \gamma)$. Also wäre $\alpha + \beta = \beta + \gamma$, und $\alpha = \gamma$, welches der Voraussetzung entgegen ist.

200 §.

Die Wurzeln einer unreinen quadratischen Gleichung sind beyde möglich, wenn $Q + \frac{1}{4}PP$ eine positive Größe, also Q entweder selbst positiv, oder doch kleiner,

kleiner, als $\frac{1}{4}PP$ ist. Denn $\frac{1}{4}PP$ ist allemahl positiv, wenn gleich P negativ wäre. Beyde Wurzeln sind aber unmöglich, wenn Q negativ, und größer ist, als $\frac{1}{4}PP$. Wäre Q negativ, und $-Q+\frac{1}{4}PP=0$: so wären beyde Wurzeln gleich groß. Aber dies giebt $\frac{1}{4}PP=Q$ und die Gleichung wäre $xx+Px=-\frac{1}{4}PP$, also $xx+Px+\frac{1}{4}PP=0$, und $x+\frac{1}{2}P=0$, oder $-x-\frac{1}{2}P=0$, beydes giebt $x=-\frac{1}{2}P$.

Es sind demnach die Wurzeln einer unreinen quadratischen Gleichung entweder beyde zugleich möglich; oder beyde zugleich unmöglich; es kan nicht die eine allein möglich, die andre unmöglich seyn.

201 §.

In jeder unreinen quadratischen Gleichung $xx+Px=Q$ ist der Coefficient des zwoten Gliedes P die negative Summe, und das dritte völlig bekante Glied Q das negative Product beyder Wurzeln.

Beweis. Es sey $\alpha=-\frac{1}{2}P+\gamma(Q+\frac{1}{4}PP)$ und $\beta=-\frac{1}{2}P-\gamma(Q+\frac{1}{4}PP)$: so sind α und β die beyden Wurzeln der Gleichung. Aber es ist $\alpha+\beta=-P$; also $P=-(\alpha+\beta)$. Ferner findet man $\alpha\beta=\frac{1}{4}PP-Q-\frac{1}{4}PP=-Q$. Also $Q=-\alpha\beta$.

202 §.

Wenn man alle Glieder der quadratischen Gleichung $xx+Px=Q$ auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringt, und die Gleichung so ausdrückt $xx+Px-Q=0$: so ist sie ein Product zweener Factoren, wovon jeder $=0$ gesetzt eine einfache Gleichung giebt, die eine Wurzel der Quadratischen bestimt.

Beweis. Wenn α und β die Wurzeln sind, so ist $P = -(\alpha+\beta)$ und $Q = -\alpha\beta$. Also $xx + Px - Q = xx - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$. Aber $(x-\alpha)(x-\beta) = xx - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$, folglich auch $(x-\alpha)(x-\beta) = xx + Px - Q = 0$. Jeder von diesen Factoren $= 0$ gesetzt giebt $x = \alpha$, und $x = \beta$.

Der Ausdruck $xx + Px + Q = 0$ kan also überhaupt jede quadratische Gleichung bezeichnen, und es ergiebt sich in jedem bestimten Fall von selbst, ob P und Q positiv, oder negativ sind. Dann aber ist P die negative Summe, und Q das Product beyder Wurzeln.

Der IX. Abschnitt.

Von den Progreßionen.

203 §.

Wenn a das erste Glied einer arithmetischen Progreßion, (164 § R.) d der Unterschied, und n die Anzahl der Glieder ist: so läst sie sich allgemein so ausdrücken

1	2	3	4	5	---	n
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	---	$a+(n-1)d$.

Wenn nun d positiv ist: so ist es eine wachsende Progreßion; eine abnehmende aber, wenn d negativ genommen wird.

Ist nun V das letzte Glied: so hat man $V = a + (n-1)d$, und wenn überhaupt P ein andres

Glied

Glied der Progreßion ist, und r die Zahl, welche ausdrückt, wie viel Glieder in der Progreßion vom ersten bis zu diesem Gliede, beyde mitgerechnet, vorkommen: so ist $P = a + (r - 1)d$.

204 §.

Man schreibe die Glieder derselben Progreßion in umgekehrter Ordnung, und zehle die Glieder so, daß man mit dem letzten Gliede anfängt, und das vorige erste Glied nun das letzte wird: so erhält man

$$\overset{1}{V},\ \overset{2}{V-d};\ \overset{3}{V-2d};\ \overset{4}{V-3d};\ \overset{5}{V-4d}\ \text{- - -}\ \overset{n}{V-(n-1)d}.$$

Wenn nun überhaupt Q ein Glied der Progreßion ist, und r die Anzahl der Glieder von V bis Q, beyde mitgerechnet: so ist $Q = V - (r - 1)d$.

205 §.

Die Summe des ersten und letzten Gliedes der arithmetischen Progreßion ist so groß, als die Summe zweyer andern Glieder P und Q, wovon das eine P vom ersten a um so viele Glieder abstehet, als das zweyte Q vom letzten V, rückwärts gerechnet.

Beweis. Es sey r die Anzahl der Glieder von a bis P, und von V bis Q rückwärts gerechnet: so hat man $P = a + (r - 1)d$

und $Q = V - (r - 1)d$ (203. 204 §)

also $P + Q = a + V$.

Wenn die Anzahl aller Glieder der Progreßion eine ungrade Zahl ist: so giebt es ein mittelstes Glied, welches vom ersten und letzten um gleich viele Glieder abstehet. Es sey nemlich $2k + 1$ die Anzahl

der Glieder: so ist das $(k+1)$te, das mittelste. Dies kan man $= P$ setzen: so wird

$$P = a + kd$$

und wenn man es als das $(k+1)$te von V rückwärts gerechnet, betrachtet: so kan man es auch $= Q$ setzen, und es wird nun

$$Q = P = V - kd$$

also $2P = 2Q = a + V$.

Demnach ist in diesem Fall das doppelte mittelste Glied der Summe des ersten und letzten gleich.

206 §.

Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progreßion zu finden, wenn das erste und letzte Glied, nebst der Anzahl der Glieder gegeben sind.

Aufl. Das halbe Product aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die Anzahl aller Glieder giebt die gesuchte Summe.

Beweis. Wenn die Anzahl der Glieder grade ist: so giebt es halb so viel Paar Glieder, die vom ersten und letzten um eine gleiche Anzahl Glieder abstehen, und jedes Paar ist $= a + V$, wenn a das das erste und V das letzte Glied bedeutet. Nun sey $n = 2k$ die Anzahl der Glieder: so ist die Summe aller dieser Paare, folglich die Summe aller Glieder $= (a + V)k = (a + V) * \frac{1}{2}n$.

Ist aber die Anzahl der Glieder n, ungrade: so sey $n = 2k + 1$. Zählt man nun die Paare der Glieder, die vom ersten und letzten gleichweit abstehen: so ist die Anzahl dieser Paare $= k$, und das mittelste bleibt übrig; ihre Summe ist $= (a + V)k$. Um nun die Summe aller Glieder zu haben, muß

man

man hiezu das mittelste addiren. Dies mittelste ist $= \frac{1}{2}(a+V)$ (205 §), also wird die gesuchte Summe $= (a+V)k + \frac{1}{2}(a+V) = (a+V)(k+\frac{1}{2}) = (a+V) \times \frac{1}{2}n$, wie vorhin.

207 §.

Wenn diese Summe $= S$ gesetzt wird: so hat man $S = \frac{1}{2}n(a+V)$. Vermöge des 203 § hat man $V = a + (n-1)d$, und dies sind zwo Fundamentalgleichungen in der Lehre von der arithmetischen Progreßion. Man hat hier 5 Größen a, V, S, d, n; und wenn 3 davon gegeben sind: so kan man die übrigen beyden aus den eben angeführten Gleichungen finden (186 §). Setzt man den Werth von V in die Gleichung, welche S ausdrückt: so wird $S = \frac{1}{2}n\left(2a+(n-1)d\right)$, $= an + \frac{1}{2}(nn-n)d$.

208 §.

Die Summe aller Glieder ist gegeben, nebst ihrer Differenz und dem ersten Gliede: man soll die Anzahl aller Glieder finden.

Aufl. Es sind S, d und a gegeben; man sucht n. Zu dem Ende schaffe man aus beyden Fundamentalgleichungen V weg, und man erhält

$$\frac{2S}{n} - a = a + nd - d$$

oder $2S = 2an + d.nn - dn$.

Wenn man dies gehörig ordnet, und mit d dividirt: so wird

$$nn + \frac{(2a-d)n}{d} = \frac{2S}{d}$$

und $n = -\frac{(2a-d)n}{2d} \pm r\left(\frac{2S}{d} + \frac{(2ad-d)^2}{4dd}\right)$.

Man erhält einen zur würklichen Berechnung bequemern Ausdruck, wenn man die Gleichung

$$dnn+(2a-d)n=2S$$

mit d multiplicirt, und das Product dn sucht, welches man hierauf mit d dividiren kan. Es wird nemlich $ddnn+(2a-d)nd=2Sd$.

Setzt man nun $dn=z$: so wird

$$zz+(2a-d)z=2Sd$$

also $z=\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2}d)\pm r\left(2Sd+(a-\frac{1}{2}d)^2\right)$

oder $z=(\frac{1}{2}d-a)\pm r\left(2Sd+(\frac{1}{2}d-a)^2\right)$

Hat man z gefunden: so erhält man $n=\frac{z}{d}$.

Exempel.

Es sey $S=235$, $d=5$, $a=1$: so wird

$\frac{1}{2}d-a=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $(\frac{1}{2}d-a)^2=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$,

$2Sd=2\times 235\times 5=2350$.

Folglich $2Sd+(\frac{1}{2}d-a)^2=2352\frac{1}{4}=2352,25$

und $r\left(2Sd+(\frac{1}{2}d-a)^2\right)=48,5$.

Daher ist der positive Werth von $z=50$, und $n=\frac{50}{5}=10$. Der negative Werth von z wäre 47; er wird aber hier nicht gebraucht.

Es sey $S=714$, $d=3$, $a=4$:

so hat man $a-\frac{1}{2}d=2,5$; $(a-\frac{1}{2}d)^2=6,25$;

$2Sd=2\times 714\times 3=4284$.

Folglich $2Sd+(a-\frac{1}{2}d)^2=4290,25$, und

$r\left(2Sd+(a-\frac{1}{2}d)^2\right)=65,5$, also $z=63$,

und $n=\frac{z}{d}=21$.

209 §.

Wenn eben die Stücke, wie im vor. § gegeben sind; das letzte Glied zu finden.

Aufl. Aus den beyden Fundamental-Gleichungen (207 §) schaffe man n weg: so erhält man

$$\frac{2S}{a+V} = \frac{V-(a-d)}{d}$$

Dies giebt $2Sd = \left(V-(a-d)\right)a+V$,

also $2Sd = VV \mp a(a-d)V - a(a-d)$,

oder $VV + dV = 2Sd + a(a-d)$.

Dies giebt $V = +\frac{1}{2}d \pm r\left(2Sd + a(a-d) + \frac{1}{2}dd\right)$

oder auch $V = -\frac{1}{2}d \pm r\left((2S + \frac{1}{4}d)d - a(d-a)\right)$

da dann wiederum die positive Wurzel gebraucht werden muß.

Behält man die Zahlen des ersten Exempels im vorigen §: so wird $2Sd + \frac{1}{4}dd = 2356,25$, und $a(d-a) = 4$, also der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $= 2352,25$, und die Wurzel $= 48,5$, also $V = 46$.

Im zweyten Exempel wird $2Sd + \frac{1}{4}dd = 4268,25$, und $a(d-a) = 4$, also $V = -1,5 + r\,4290,25 = 64$.

210 §.

Jede vollkomne Quadratzahl ist die Summe so vieler ungraden Zahlen, als die Wurzel Einheiten hat.

Beweis. Die ungraden Zahlen machen eine Arithmetische Reihe aus, wie

1	2	3	4	5	6	-	-	n
1	3	5	7	9	11	-	-	$2n=1$

so, daß $a = 1$, und $V = 2n - 1$ wird, wenn n die Anzahl der Glieder ist. Also wird nach dem 207 § $S = \frac{1}{2} n (1 + 2n - 1) = n^2$.

Dieser Satz ist sehr bequem, wenn man zu dem im 109 § angezeigten Gebrauch Quadrat-Tafeln verfertigen will, und man kan sich den Ursprung aller Quadrat-Zahlen auf folgende Art vorstellen.

Man setze alle vollkomne Quadrat-Zahlen in ihrer Ordnung nach einander hin, und subtrahire jedes Glied dieser Reihe vom folgenden: so machen die Differenzen die Reihe der ungraden Zahlen aus. Wenn man nun aufs neue die Differenzen dieser Reihe nimt: so wird jede $= 2$, und man erhält folgende Reihen:

Quadrate.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100 u. s. w.

I. Differenzreihe.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

II. Differenzreihe.

2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.

Aus dem dritten Quadrat 9 wird also das vierte, wenn man die darunter stehenden Glieder der Differenz-Reihen dazu addirt. Man erhält nemlich $9 + 5 + 2 = 16$. Sucht man nun das folgende Glied in jeder Differenz-Reihe: so erhält man eben so das folgende Quadrat $16 + 7 + 2 = 25$ u. s. f.

211 §.

Bey Berechnung der Cubic-Tafeln kan man sich eines ähnlichen Vortheils bedienen. Wenn man nemlich die Reihe der Würfel, wie sie in ihrer Ordnung

nung folgen, niederschreibt, und sodann die Differenz-Reihen, wie vorhin, sucht: so wird die zweyte Differenz-Reihe eine arithmetische Progreßion, und alle Glieder der dritten Differenzreihe werden = 6.

Würfel.

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512 u. s. f.

I. Differenz-Reihe.

7. 19. 37. 61. 91. 127. 169.

II. Differenz-Reihe.

12. 18. 24. 30. 36. 42

III. Differenz-Reihe.

6. 6. 6. 6. 6.

Daß dies beständig so erfolgen werde, davon kan man sich so überzeugen. Wenn m eine ganze Zahl ist, welche man will: so ist $m+1$ die nächstfolgende. Ist also das $m$te Glied in der Reihe der Würfel $= m^3$: so ist das nächstfolgende $(m+1)$te Glied $= (m+1)^3 = m^3+3m^2+3m+1$ (92 §), und die Differenz beyder Glieder wird $= 3m^2+3m+1$. Dieser Ausdruck giebt demnach ein jedes Glied der ersten Differenz-Reihe, nachdem man $m = 1$, oder $= 2$, oder $= 3$ u. s. f. setzt. Er bezeichnet überhaupt das $m$te Glied der ersten Differenz-Reihe, und man erhält ihr $(m+1)$tes Glied, wenn man $m+1$ stat m schreibt. Es wird also

das $(m+1)$te Glied $= 3m^2+6m+3+3m+3+1$
das $m$te Glied $= 3m^2 \quad +3m \quad +1$

Differenz $= \quad 6m+6$

Dieser

Dieser Ausdruck giebt jedes Glied der zwoten Differenz-Reihe, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, u. s. f. nach der Ordnung stat m setzt. Nun sieht man leicht, daß dies eine arithmetische Progression werde, wovon das erste Glied 12, und die Differenz der Glieder 6 ist. Denn für $m = 1$ wird $6m + 6 = 12$. Der allgemeine Ausdruck $6m + 6$ giebt jedes $m$te Glied, und man hat das $(m+1)$te, wenn man $m+1$ stat m schreibt. Demnach ist

das $(m+1)$te Glied $= 6m + 6 + 6$
das $m$te Glied $= 6m + 6$
Differenz $= 6$

Man braucht also nur die ersten 4 Würfel durch die Multiplication zu suchen, daraus erhält man die ersten drey Glieder der ersten Differenz-Reihe. Ferner hieraus die ersten zwey Glieder der zwoten Differenz-Reihe. Schreibt man nun die Differenz allemal unter dem gröſten Gliede der vorhergehenden Reihe: so darf man nur zu dem vierten Würfel die drey darunter stehenden Differenzen addiren, und die Summe giebt den fünften Würfel. So ist $64 + 37 + 18 + 6 = 125$. Nun kan man in jeder Differenz-Reihe das folgende Glied suchen, und wie vorhin, den fünften Würfel, u. s. f. und auf eben die Art jeden folgenden Würfel finden.

212 §.

Es haben diese Lehren von den Progressionen nicht allein in der Mathematik ihren Nutzen; sondern es können auch im gemeinen Leben mancherley Rechnungs-Fragen vorkommen, deren Auflösung von diesen Lehren abhängt. Wenn z. E. eine Arbeit desto

mehr

mehr Schwierigkeit hat, je länger sie fortgesetzt wird: so werden die Arbeitskosten desto grösser, und es kan, nach Beschaffenheit der Arbeit, diese Vermehrung der Arbeitskosten, in arithmetischer Progression fortgehen. Bey hohen Gebäuden verursachen die obersten Stockwerke mehr Kosten, als die untern. Bey Ausgrabung eines Brunnens wird die Arbeit desto beschwerlicher, je tiefer man komt. Denn die Erde muß desto höher gebracht werden, und es werden immer mehr Neben-Arbeiten, an steifen, aussetzen und unterfahren erfordert, damit nicht alles nachfalle. Bey Berechnung solcher Arbeitskosten komt es nun freylich auf den jedesmaltgen Accord an. Indessen können doch Fälle vorkommen, wobey die bisherige Theorie ihre Anwendung findet, zumal wenn der Accord so geschlossen wäre, daß für einen bestimten Theil der Arbeit ein gewisser Lohn, und für einen jeden folgenden Theil eine bestimte Zulage festgesetzet worden, wenn man etwa gleich Anfangs nicht voraus wissen kan, wie weit die Arbeit werde fortzusetzen seyn.

Wäre z. E. bey Ausgrabung eines Brunnens der erste Fuß zu 4 Groschen und jeder folgende zu 3 Gr. mehr, als der vorhergehende bedungen: so läst sich leicht berechnen, wie viel man zu zahlen habe, wenn der Brunnen die Tiefe von 20 Fuß erhalten hat. Man sucht nemlich die Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $a = 4$, die Differenz $d = 3$, die Anzahl der Glieder $n = 20$ ist, und man erhält aus dem 207 § $S = 80 + 19 \times 30 = 650$ Gr $= 27$ Rthl 2 Gr.

Sollte jeder folgende Fuß 4 Gr. mehr kosten: so wäre $a = d$, und $S = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}ann = \frac{1}{2}an(n+1) = 40 \times 21 = 840$ Gr $= 35$ Rthl.

213 §.

Es sey nun ein Brunnen auf 12 Fuß Tiefe mit einem Arbeiter auf 13 Thlr. verdungen. Allein dieser Arbeiter stirbt, oder wird sonst gehindert, nachdem er nur bis auf 8 Fuß Tiefe gekommen ist. Ein andrer übernimt auf eben den Accord, die letzten 4 Fuß zu Stande zu bringen. Nun ist die Frage: wie die bedungenen 13 Rthl. oder 312 Gr. unter beyde Arbeiter zu vertheilen sind.

In diesem Falle ist die Summe der Progression $S=312$ nebst der Anzahl der Glieder $=12$, gegeben. Aber es muß von den, im 207 § genanten 5 Stücken noch eines bestimt seyn. Demnach muß man entweder den ersten Fuß taxiren, oder auch die Differenz der Glieder, wieviel nemlich für jeden folgenden Fuß mehr, als für den vorhergehenden zu zahlen sey. Nimt man an, daß der zweete Fuß zweymahl, der dritte, dreymahl so viel Arbeit erfodere, als der erste, u. s. f.: so hat man $a=d$, und man kan aus der Gleichung $S=\frac{1}{2}an(n+1)$ (212 §) nun $a=d$ finden. Es wird nemlich

$$a=\frac{2S}{n(n+1)}=\frac{624}{12\times 13}=\frac{52}{13}=4\text{ Gr.}$$

Nun setze man $n=8$: so wird $S=\frac{1}{2}\times 4\times 8\times 9$ $=16\times 9$ Gr. $=6$ Thl., und dies bekömt der erste Arbeiter, der andre aber 7 Thl.

214 §.

Wenn a das erste Glied einer geometrischen Progreßion ist, und e der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten: so kan man sie auf folgende Art allgemein ausdrücken.

1 2 3 4 5 6 n
a ae ae^2 ae^3 ae^4 ae^5 - - - ae^{n-1} (179 § R.)

Ist nun V das letzte Glied, und n die Anzahl der Glieder: so hat man $V = ae^{n-1}$, und wenn P ein jedes Glied der Progreßion, r aber die Zahl der Glieder von a bis P ist: so hat man $P = ae^{r-1}$.

215 §.

Man schreibe, wie im 204 § die Glieder der Progreßion in umgekehrter Ordnung, und zähle sie rückwärts: so erhält man

1 2 3 4 5 n
V $\frac{V}{e}$ $\frac{V}{e^2}$ $\frac{V}{e^3}$ $\frac{V}{e^4}$ . . . $\frac{V}{e^{n-1}}$

Wenn nun Q ein jedes Glied der Progreßion ist; und r die Anzahl der Glieder von V bis Q: so ist

$$Q = \frac{V}{e^{r-1}}.$$

216 §.

Wenn man die Differenzen der Glieder einer geometrischen Progreßion, wie im 210 § sucht: so gehen die Differenzen ebenfalls in einer geometrischen Progreßion fort, die mit der Haupt-Reihe einerley Exponenten hat.

Beweis. Es sey

die Haupt-Reihe

a ae ae^2 ae^3 ae^4 u. s. f.

so wird die

Differenz-Reihe

$a(e-1)$ $ae(e-1)$ $ae^2(e-1)$ $ae^3(e-1)$

und

und dies ist eine geometrische Progreßion, die eben den Exponenten e hat.

Eben dies gilt demnach von jeder folgenden Differenz-Reihe; und wenn man die übrigen Differenz-Reihen sucht: so werden alle ersten Glieder dieser Reihen, so wie auch alle diejenigen, die von den ersten um eine gleiche Anzahl Glieder abstehen, in geometrischer Progreßion fortgehen, die $e-1$ zum Exponenten hat.

217 §.

Das Product des ersten und letzten Gliedes der Progreßion, ist so groß, als das Product zweyer andern Glieder P und Q, wovon das eine P vom ersten a um so viele Glieder absteht, als das zweyte Q vom letzten V rückwärts gerechnet.

Beweis. Wenn r die Anzahl der Glieder von a bis P, und von V bis Q ist: so hat man

$$P = ae^{r-1} \quad (214\,\S)$$

$$Q = \frac{V}{e^{r-1}} \quad (215\,\S)$$

also $P \times Q = a \times V$.

Wenn die Anzahl aller Glieder der Progreßion ungrade ist: so giebt es auch hier ein mittelstes Glied, und das Quadrat desselben ist so groß, als das Product des ersten und letzten Gliedes. Ist nemlich $2k+1$ die Anzahl der Glieder: so ist das $(k+1)$te das mittelste Glied, und dies ist $= ae^k$. Aber $V = ae^{2k}$, und $a \times V = a^2e^{2k} = (ae^k)^2$.

218 §.

In jeder geometrischen Progreßion verhält sich die Summe aller Glieder, weniger das letzte, zur Summe aller Glieder, weniger das erste, wie das erste zum zweyten Gliede.

Beweis. Es sey S die Summe aller Glieder, von a angerechnet bis $V = ae^{n-1}$: so wird

$$S - V = a + ae + ae^2 \text{ - - - } + ae^{n-3} + ae^{n-2}$$
$$S - a = ae + ae^2 + ae^3 \text{ - - } ae^{n-2} + ae^{n-1}$$

Nun erhellet, daß die zwote Reihe für $S - a$ herauskomme, wenn die erste $S - V$ mit e multiplicirt wird. Also ist $S - a = (S - V)e$. Folglich $1 : e = S - V : S - a$, oder $a : ae = S - V : S - a$.

Aus der Proportion $e : 1 = S - a : S - V$ folgt auch $e - 1 : 1 = V - a : S - V$ (189 § G.)

219 §.

Wenn das erste Glied der Progreßion, der Exponent, und das letzte Glied; oder auch statt des letzten, die Anzahl der Glieder gegeben ist; die Summe aller Glieder zu finden.

Aufl. Aus dem vor. § erhält man die Gleichung

$$S - V = \frac{V - a}{e - 1}$$

also ist $S = \frac{V - a}{e - 1} + V$

oder $S = \frac{eV - a}{e - 1}$.

Setzt man ferner $V = ae^{n-1}$:

so wird $S = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$.

Man hat demnach auch hier zwo Fundamental-Gleichungen $V = ae^{n-1}$, und $S = \frac{eV - a}{e - 1}$, und wenn man von den fünf Größen a, e, n, V, S, drey gegeben sind: so kan man die übrigen finden.

220 §.

Das älteste Beyspiel einer Rechnungsfrage, bey welcher die Aufgabe des vor. § ihre Anwendung findet, ist vermuthlich diejenige, welche dem Erfinder des Schachspiels vermöge der Erzehlung eines arabischen Schriftstellers zugeschrieben wird. Dieser Schriftsteller heist *Selâhô ddîn Mohammed Alsephadi*, und in seinen Commentariis über das Gedicht Lamiato' l Ajam des Poeten Tograii bey Gelegenheit des Verses Enna'l ola hadathatri erzehlt er folgendes:

Ein persischer König Ardschir Ebn Babet hatte das Bretwürfel-Spiel (Toccodille) erfunden, womit die Perser sich groß machten, weil die Erfindung für sehr sinnreich gehalten ward. Allein ein Indianer Sessa Ebn Daher erfand hierauf das Schachspiel, und machte dem Könige Shehram seine Erfindung bekant. Dem König gefiel die Erfindung ungemein, und man räumte dieser Erfindung bald einen grossen Vorzug vor dem Bretwürfel-Spiel ein. Der König befahl dem Sessa, daß er sich zur Belohnung etwas ausbitten mögte, es sey von so grossen Werthe, als es wolle. Sessa bat hierauf den König um so viel Waitzen, als die Summe austragen würde, wenn man ihm für das erste Feld im Schachbrett 1 Korn, für das 2te 2 Körner, für das dritte 4 Körner, u. s. f. für jedes fol-

folgende Feld doppelt so viel, als für das vorhergehende reichte. Der König hielte dies für eine ungemeine Kleinigkeit, und ward ungnädig, weil er es als eine Verachtung der Königlichen Gnade aufnahm. Allein Sessa bestand auf seiner Bitte, und der König befahl, man sollte es ihm geben. Bald aber ward dem Könige zu seinem Erstaunen hinterbracht, daß dem Sessa so viele Körner, als er verlangt hätte, nicht gegeben werden könten, und wenn auch alles Getrayde in der ganzen Welt zusammen gesamlet würde. Man legte dem Könige die Berechnung vor, und er bewunderte den Sessa noch mehr wegen seiner sinnreichen Bitte, als wegen der Erfindung des Schachspiels.

Wenn man weis, daß das Schachbrett 64 Felder hat: so erhellet, daß Sessa eine Anzahl von Waitzen-Körnern verlangt habe, die so groß ist, als die Summe der Progression 1 2 4 8 16 32 u.s.f. bis zum 64sten Gliede.

Setzt man nun $a=1$, $e=2$, $n=64$: so wird nach dem vor. § diese Summe $=2^{64}-1$. Nun ist

$l\,2=0{,}3010300$

64

12041200

180618

$l\,2^{64}=19{,}2659200$

Also sind die ersten 7 Ziffern der gesuchten Zahl folgende 1844674, und es müsten noch 13 Ziffern folgen, welche zu finden, die Logarithmen-Tafeln nicht hinreichen. Demnach geht diese Zahl noch weit über

18 Trillionen hinaus. Man kan die eigentliche Zahl ohne grosse Schwürigkeit durch die Multiplication finden. Es wird nemlich

$$4 = 2^2$$
$$16 = 2^4$$
$$256 = 2^8$$
$$65536 = 2^{16}$$
$$4294'967296 = 2^{32}$$
$$18'''446744''073709'551615 = 2^{64} - 1,$$

und diese letzte Zahl ist die Summe aller Körner, welche Sessa verlangt hat.

Um nun einen Ueberschlag zu machen, wie viel Waitzen diese Menge Körner nach dem jetzt üblichen Maaß oder Gewicht austragen würde, muß man folgendes wissen. Ein Sterling (Englisch Geld), soll nach einem im Jahr 1302 unter Eduard I Regierung abgefasten Gesetz, so schwer seyn, als 32 wohl ausgetrocknete, und aus der Mitte der Aehre genommene Waitzenkörner. Weiter sollen 20 Sterling eine Unze, und 12 Unzen ein Pfund wägen; 64 Pf. aber auf einen Englischen Scheffel gehen. Demnach wägen 7680 Körner 1 Pf. (Troy Gewicht) und ein Scheffel fasset 491520 Körner. Dividirt man hiemit die gefundene Zahl: so findet man 37''529996'894754 Scheffel. Ein Englischer Scheffel fasset 1848 Cubikzoll, und eine Englische Meile ist 5280 Fuß lang. Daher hält eine Cubikmeile 147197952000 Cubik-Fuß, oder 137639'643428 Scheffel. Hiemit dividire man die gefundene Anzahl der Scheffel: so komt ein Raum von mehr, als 272 Cubik-Meilen, den die gefundene Menge Körner einnehmen würde. Man vergleiche hiemit WALLISII Operum Mathem. P. I. Cap. 31. p. 271 seq.

221 §.

Die Summe der Glieder S und ihre Anzahl n, nebst dem Exponenten e sind gegeben; man sucht das erste Glied.

Aufl. Aus $S = \frac{eV - a}{e-1} = \frac{ae^n - a}{e-1}$ folgt

$$a = \frac{S(e-1)}{e^n - 1}.$$

Hieraus ergiebt sich jedes andre Glied P der Progreßion, wenn von a bis P die Anzahl der Glieder $= r$ ist, weil $P = ae^{r-1}$. Bey würklicher Berechnung dieses Ausdrucks braucht man mit Vortheil die Logarithmen, wenn e und r nicht sehr groß sind. Es wird nemlich $lP = la + (r-1)le$.

222 §.

Das erste und letzte Glied, oder auch das erste Glied, und die Summe aller Glieder sind nebst dem Exponenten gegeben; man sucht die Anzahl aller Glieder.

Aufl. Aus $V = ae^{n-1}$ ergiebt sich n vermittelst der Logarithmen. Weil nemlich $lV = la + nle - le$: so wird $nle = lV - la + le$, und $n = \frac{lV - la}{le} + 1$.

Aus $S = \frac{ae^n - a}{e-1}$ folgt $(e-1)S = (a^n - 1)$ und $\frac{(e-1)S}{a} = e^n - 1$; also $\frac{(e-1)S + a}{a} = e^n$, und $l\big((e-1)S + a\big) - la = nle$, folglich $n = \frac{l\big((e-1)S + a\big)}{le} - la$.

223 §.

Dafern der Exponent e in dem allgemeinen Ausdruck der Progreßion (214 §) eine ganze Zahl, oder ein uneigentlicher Bruch ist; so wachsen die Glieder der geometrischen Progreßion desto mehr, ie weiter man sie fortsetzt, und wenn man annimt, daß die Anzahl der Glieder unendlich groß werde: so wird das letzte Glied unendlich groß. Es ist nemlich für sich offenbar, daß e^{∞} unendlich groß sey, wenn e eine ganze Zahl ist, und eben daraus folgt, daß auch dieser Ausdruck unendlich groß sey, wenn e ein uneigentlicher Bruch, und größer, als 2 ist. Nun könnte man zweifeln, ob dies auch wahr sey, wenn e kleiner, als 2 ist. Allein in diesem Fall erhellet die Sache so. Es sey $e = \frac{b+c}{b}$, wo b und c ganze Zahlen sind, und $c < b$ ist: so hat man $l\left(\frac{b+c}{b}\right)^n = n\left(l(b+c) - lb\right)$. Dieser Logarithme ist positiv; er wächst, wenn n wächst, und ist für $n = \infty$ auch unendlich groß; also ist auch $\left(\frac{b+c}{b}\right)^n$ selbst unendlich groß, wenn $n = \infty$ ist.

Wenn aber e ein eigentlicher Bruch ist, so daß man $e = \frac{b}{b+c}$ setzen kan: so nehmen die Glieder der geometrischen Progreßion ohne Aufhören ab, wenn die Anzahl der Glieder ohne Aufhören wächst, und die Grenze, der sich das letzte Glied ohne Aufhören nähert, ist $= 0$. Diese Grenze stellet man sich hier als das letzte Glied vor, wenn $n = \infty$ wird. Es

ist

ist nemlich $V = ae^{n-1} = \frac{a}{e}e^n = \frac{a(b+c)}{b}$.

$$\left(\frac{b}{b+c}\right)^n = \frac{a(b+c)}{b} : \left(\frac{b+c}{b}\right)^n;$$

und dieser Quotient ist $= 0$; wenn $n = \infty$ ist (298).

In eben diesem Fall aber ist die Summe der Progreßion endlich: es wird nemlich $S = \frac{a}{1-e}$ (219 §), $= \frac{a(b+c)}{c}$, wenn $V = 0$ wird. Eigentlich ist dieser Ausdruck eine Grenze, der sich die Summe der Progreßion ohne Aufhören nähert, wenn die Anzahl der Glieder ohne Aufhören wächst.

224 §.

Hievon läst sich die Anwendung leicht auf besondre Fälle machen. Sucht man die Summe der unendlichen Reihe

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ - - - in inf.

so ist $a = \frac{1}{2}$; $\frac{b}{b+c} = \frac{1}{1+1}$. Also $b = 1$, $c = 1$, und $S = 1$. Auf eben die Art findet man

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ - - - $= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ - - - $= \frac{1}{3}$

und überhaupt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \cdots = \frac{1}{x-1}.$$

Setzt man nemlich $a = \frac{1}{x}$, $b = 1$, und $1 + c = x$.

so wird $c = x-1$, also $S = \frac{a(b+c)}{c} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1}$

$= \frac{1}{x-1}$.

Wenn man den Zehler des Bruchs $\frac{1}{x-1}$ durch seinen Nenner dividirt: so ergiebt sich eben die Reihe.

225 §.

Dafern die Glieder einer solchen Reihe wechselsweise die Zeichen + und − vor sich haben: so kan man sie als die Differenz zwoer Reihen von eben der Art ansehen. Hätte man nemlich die Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6} \cdots$$

so ist diese Reihe

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} \cdots\right) - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \cdots\right).$$

Aber Vermöge des 224 § ist

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \cdots = \frac{1}{x^2-1},$$

und $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} \cdots =$

$$\frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \cdots\right) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Also die Reihe

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \cdots = \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{x+1}.$$

226 §.

226 §.

Um einiger massen zu zeigen, daß die Betrachtung solcher unendlichen Reihen in der Anwendung allerdings ihren Nutzen habe, kan die Methode dienen, der sich der Herr von Leibnitz bedienet hat, die Berechnung des Interusurii zu erklären. Wenn man jährlich 5 pro cent Zinsen bezahlt: so betragen die Zinsen am Ende des Jahrs $\frac{1}{20}$ des Capitals. Nun sey mir Cajus nach Verlauf eines Jahres ein gewisses Capital schuldig, welches hier $= 1$ gesetzt werden kan. Bezahlt er mir dies Capital gleich jetzo baar: so bin ich ihm am Ende des Jahrs $\frac{1}{20}$ an Zinsen schuldig, weil er diese damit hätte gewinnen können. Rechnet nun Cajus gleich $\frac{1}{20}$ ab, und bezahlt mir $1 - \frac{1}{20}$: so ist es so viel, als ob ich gleich jetzt ein Capital bezahle, das ich erst am Ende des Jahres schuldig bin. Daher muß mir Cajus am Ende des Jahrs $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$ bezahlen. Giebt er mir dies gleich jetzo, so, daß ich $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$ erhalte: so anticipirt er die Bezahlung von $\frac{1}{400}$, und ich bin gehalten, am Ende des Jahrs ihm $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{8000}$ an Zinsen zu bezahlen. Rechnet Cajus diese gleich jetzt ab, und giebt mir $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$: so anticipire ich die Bezahlung. Dies geht so ohne Aufhören fort. Also ist das, was ich gleich jetzt mit Recht fordern kan, die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000} \text{ u. s. w.}$$

weil Cajus von dem, was er mir giebt, allemahl wieder $\frac{1}{20}$ abrechnen, und ich dagegen von dem abgerechneten wieder $\frac{1}{20}$ fordern kan.

Man setze in der Reihe des 226 § $x = 20$: so wird $\frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} - \cdots = \frac{1}{21}$, und dies ist der Rabatt. Das wirklich zu zahlende Capital aber $1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$, wie im 232 § der Rech. Man sehe die Acta Erudit. A. 1683. Mens. Octob. p. 425.

Der X. Abschnitt.

Von der Annuitäten- und Leibrenten-Rechnung.

227 §.

Es lebt jemand von den Zinsen seines Capitals; kan aber mit den Zinsen allein nicht auskommen. Wenn er nun annimt, daß er noch eine gewisse Anzahl Jahre höchstens zu leben habe: so ist die Frage, wie viel er jährlich verzehren könne, damit er Zeit Lebens genug habe, vorausgesetzt, daß er alle Jahre gleich viel Aufwand mache.

Aufl. Das Capital sey S, und u die jährliche Zinse von 100: so ist der Werth des Capitals nach Verlauf eines Jahrs $= \frac{100 + u}{100}$ S. Wenn man also der Kürze wegen $\frac{100 + u}{100} = k$ setzt: so ist die einjährige Zinse $= (k - 1)$S.

Ferner sey das, was im ersten Jahre ausser der Zinse verzehrt wird, $= b$: so ist das, was im ersten

und

und jedem folgenden Jahr aufgehet, $= (k-1)S+b$, und das Capital S ist am Ende des ersten Jahres um b vermindert. Im zweyten Jahre trägt der Rest $S-b$ die Zinse $(k-1)S-(k-1)b$. Dies ist nicht so viel, als der jährliche Aufwand erfordert, und es wird überdem noch ein Theil des Capitals verzehrt. Dieser sey $= c$, so muß $(k-1)S-(k-1)b+c=(k-1)S+b$ seyn, folglich wird $c=(k-1)b+b=kb$; und es ist dieser Zusatz im zweyten Jahre so groß, als der um seine einjährigen Zinsen vermehrte Zusatz des ersten Jahrs. Demnach ist am Ende des zweyten Jahres der Rest vom Capital $=S-(b+c)=S-(k+1)b$, und dieser trägt im dritten Jahr die Zinse $(k-1)S-(k^2-1)b$. Der Zusatz in diesem Jahr vom Capital sey $= e$, so muß $(k-1)S-(k^2-1)b+e=(k-1)S+b$ seyn, und es wird $e=k^2b$. Dies ist wiederum der um seine einjährigen Zinsen vermehrte Zusatz des zweyten Jahrs. Wenn man diese Rechnung fortsetzt, so ergiebt sich, daß allemahl der Zusatz des folgenden Jahres so groß sey, als der um seine einjährige Zinsen vermehrte Zusatz des vorigen Jahrs, und man erhält folgende Reihe,

Zahl der verflossenen Jahre.

1. 2. 3. 4. - - - r.

Zusatz vom Capital.

b. kb. k^2b. k^3b. - - $k^{r-1}b$.

Nun läst sich allgemein zeigen, wenn der Zusatz im $r$ten Jahr $=k^{r-1}b$ ist, daß er im $(r+1)$ten Jahr $=k^rb$ seyn müsse, vorausgesetzt, daß der Ausdruck $k^{r-1}b$ vom ersten bis zum $r$ten Jahr gelte. Hat

nemlich

nemlich diese Voraussetzung ihre Richtigkeit, so ist am Ende des $r$ten Jahrs der gesamte Zusatz vom Capital $= b + kb + k^2b \ldots + k^{r-1}b = \frac{b(k^r - 1)}{k - 1}$ (219 §), also der Rest vom Capital $= S - \frac{b(k^r - 1)}{k - 1}$. Dieser trägt im $(r+1)$ten Jahr die Zinse $= (k-1)S - bk^r + b$. Nun sey z der Zusatz im $(r+1)$ten Jahr: so muß $(k-1)S - bk^r + b + z = (k-1)S + b$ seyn, und dies giebt $z = bk^r$. Weil nun dieser Ausdruck für die ersten drey Jahre gilt: so gilt er auch für das vierte Jahr u. s. f. für alle folgende Jahre. Demnach ist am Ende des $n$ten Jahrs der Rest vom Capital $= S - \frac{b(k^n - 1)}{k - 1}$, und wenn am Ende dieses Jahrs alles verzehrt ist: so wird $S - \frac{b(k^n - 1)}{k - 1} = 0$, folglich $S = \frac{b(k^n - 1)}{k - 1}$, und $b = \frac{(k-1)S}{k^n - 1}$. Wenn nun a der jährliche Aufwand ist, der für jedes Jahr einerley bleibt: so wird $a = (k-1)S + b$; also $a = (k-1)S + \frac{(k-1)S}{k^n - 1}$, oder $a = \frac{(k-1)k^nS}{k^n - 1}$, und dies ist der gesuchte jährliche Aufwand.

Es sey $S = 6000$ Thlr.; wenn diese zu 5 pro Cent Zinsen stehen: so ist $k = \frac{21}{20} = 1{,}05$, und $k - 1 = 0{,}05$. Ferner sey die Zahl der Jahre $n = 30$: so wird $a = \frac{0{,}05 \times 1{,}05^{30} \times 6000}{1{,}05^{30} - 1} =$

$\frac{5 \times 1{,}05^{30} \times 60}{1{,}05^{30} - 1}$. Also kan man die Rechnung vermittelst der Logarithmen so führen:

$l\,1{,}05 = 0{,}0211893$
$l\,1{,}05^{30} = 0{,}6356790$
also $1{,}05^{30} = 4{,}321943$
und $1{,}05^{30} - 1 = 3{,}321943$
Weiter ist $l\,5 = 0{,}6989700$
$l\,1{,}05^{30} = 0{,}6356790$
$l\,60 = 1{,}7781513$

$l\,5 \times 105^{30} \times 60 = 3{,}1128003$
$l\,105^{30} - 1 = 0{,}5213956$

$l\,a = 2{,}5914047$
Also $a = 390{,}3054$ Thl.
oder $a = 390$ Thl. 7 Gr. $4\frac{4}{6}\frac{2}{2}\frac{2}{5}$ Pf.

228 §.

Es lebt jemand von den Zinsen seines Capitals S, ist aber von jetzt an genöthigt, alle Jahre eine gewisse Summe $= a$ zu verzehren, welche den Zinsen-Ertrag übersteigt; die Frage ist: Wie lange dieser Aufwand bestehen könne, bis das ganze Capital verzehrt ist.

Aufl. Aus der Gleichung $a = \frac{(k-1)k^n S}{k^n - 1}$, folgt $k^n a - a = k^{n+1} S - k^n S$, also $k^n (a + S - kS) = a$, und $k^n = \frac{a}{a + S - kS}$. Dies giebt $n\,lk = la - l(a + S - kS)$ und $n = \frac{la - l(a+S-kS)}{lk}$, welches die gesuchte Anzahl Jahre ist.

Es

Es sey $S = 6000$ Thlr., $k = \frac{21}{20} = 1,05$, und $a = 390,3054$ Thl.: so giebt die Rechnung

$$a + S = 6390,3054 \text{ Thlr.}$$
$$kS = 6300$$
$$a + S - kS = 90,3054$$

Ferner wird $la = 2,5914047$
$l(a + S - kS) = 1,9557257$

Rest $0,6356790$.
$l 1,05 = 0,0211893$

und $\frac{6356790}{211893} = 30$, als die gesuchte Anzahl Jahre.

229 §.

Wenn demnach der Eigenthümer des Capitals der 6000 Thlr. diese Summe an einen andern zu 5 pro Cent verleihet, und der Schuldner bezahlt stat der 300 Thl. jährlicher Zinsen 390 Thl. 7 Gr. 4 Pf.: so wird jährlich ein Theil des Capitals mit bezahlt, und in Zeit von 30 Jahren ist das ganze Capital der 6000, nebst den Zinsen richtig abgetragen. Es kan zwischen dem Gläubiger und Schuldner gleich Anfangs bey der Anleihe ein solcher Vergleich gemacht werden, vermöge dessen der Schuldner alle Jahre ausser den Zinsen einen Theil des Capitals zu zahlen sich verpflichtet; jedoch so, daß das, was der Gläubiger an Capital und Zinsen empfängt, alle Jahre einerley Summe ausmache. Man nennet dies einen Zeit-Renten-Accord, und die jährliche an den Gläubiger zu zahlende Summe, heist die Zeit-Rente, oder die Annuität. Die im 227 § gefundene Gleichung $(k^n - 1)a = (k - 1)k^n S$ enthält die Auflösung aller Rechnungs-Fragen, die bey ei-

nem solchen Zeit-Renten-Accord vorkommen können, wenn S das zu zahlende Capital, a die jährliche Rente, und n die Anzahl der Jahre bedeutet, und das Verhältniß $k:1$ dasjenige ist, nach welchem, wegen verabredeter Zinsen, das Capital in einem Jahre wächst.

230 §.

Es will jemand eine zehnjährige Zeitrente von 500 Thl. kaufen; die Frage ist, wie viel er zahlen muß, wenn 5 pro Cent Zinsen verabredet werden.

Aufl. Aus der Gleichung $(k^n - 1)a = (k-1)k^n S$ folgt $S = \frac{a}{k-1} - \frac{a}{(k-1)k^n}$. Weil nun $k = 1{,}05$, und $k - 1 = 0{,}05$: so erhält man $\frac{a}{k-1} = 20$, und

$$l\frac{a}{k-1} = 4{,}0000000$$
$$lk = 0{,}0211893$$
$$lk^{10} = 0{,}2118930$$
$$l\frac{a}{(k-1)k^{10}} = 3{,}7881070$$

also $S = 6139{,}133$ Thl.

oder $S = 6139$ Thl. 3 Gr. $2\frac{38}{125}$ Pf.

und dies ist der gegenwärtige Werth einer zehnjährigen Zeit-Rente von 500 Thl.

Der erste Theil des Ausdrucks $S = \frac{a}{k-1} - \frac{a}{(k-1)k^n}$, nemlich $\frac{a}{k-1}$, giebt ein Capital, wo-

von

von die einjährige Zinse $= a$ ist, und diese Zinse ist als eine immerwährende Zeit-Rente anzusehen. Wenn man nemlich $n = \infty$ setzt: so wird $S = \frac{a}{k-1}$. Hiebey wird nichts vom Capital verzehrt, und es wird $b = \frac{(k-1)S}{k^n-1} = 0$. Der zweete Theil des für S gefundenen Ausdrucks, nemlich $\frac{a}{(k-1)k^n}$, giebt dasjenige, was vom Capital deswegen rabattiret wird, weil die Rente nur eine bestimte Anzahl von Jahren dauren soll.

231 §.

Von diesen verabredeten Zeit-Renten sind die Leib-Renten unterschieden. Durch die letzten werden diejenigen verstanden, welche einer Person für einen gewissen Einsatz auf Zeit Lebens bezahlt werden, es mag übrigens diese Person bald sterben, oder sehr alt werden. Die Zeit-Rente muß so viele Jahre bezahlet werden, als man anfangs verabredet hat, und wenn der Käufer der Rente vorher stirbt, ehe diese Anzahl von Jahren verflossen ist: so muß die Rente an die Erben bezahlt werden. Allein die Hebung einer Leibrente hört mit dem Tode des Käufers auf. Bey der Zeit-Rente gehen Käufer und Verkäufer allemal völlig sicher, daß keiner von beyden verliert. Wenn aber jemand einer einzigen Person eine Leib-Rente verkaufen wollte: so würde der Verkäufer hiebey zu viel Gefahr leiden. Die Berechnung selbst muß nemlich eben so, wie bey einer Zeit-Rente angestellt werden. Nur wird die Anzahl

der Jahre, die der Käufer der Rente noch zu leben hat, muthmaßlich angenommen. Gesetzt nun, der Käufer der Rente wäre 30 Jahr alt, und der Verkäufer wollte annehmen, daß jener etwa noch 50 Jahre muthmaßlich lebte, und darnach den Einsatz für die zu zahlende Rente berechnen: so würde er zwar gewinnen, wenn der Rentenier vor dem 60sten Jahre stürbe; aber auch sehr viel verlieren, wenn derselbe 100 und mehr Jahr alt würde. Daher verkauft keine Casse Leibrenten auf eine, oder wenige Personen. Wenn aber einige hundert, oder tausend in eine Gesellschaft zusammen treten: so kan der Verkäufer der Renten mit mehrerer Sicherheit seine Rechnung machen. Die Rentenirer unter einander aber übernehmen einen gewissen Hazard, und gehen gleichsam eine Wette darüber ein, wer von ihnen am längsten leben werde, wobey verabredet wird, daß die frühzeitiger sterbende denen andern, die länger leben, ihren Theil der Rente, so sie nicht empfangen, überlassen. Wenn z. E. 100 Personen, die alle von gleichem Alter sind, in eine Gesellschaft zusammen treten, und auf sich Leibrenten kaufen, und der Verkäufer seine Rechnung so macht, als ob das Capital mit den Zinsen in 20 Jahren soll bezahlt seyn: so sterben viele Glieder dieser Gesellschaft von dem Jahre an, da die Rente anfängt, bis zu Ende des 20sten Jahres. Dagegen leben auch andere länger, als 20 Jahre, 10 und vielleicht 20 Jahre drüber, und sie heben also viel mehr, als ihr Capital mit den Zinsen ausmacht.

232 §.

Herr Halley ist der erste gewesen, welcher sich der in Breslau von dem Hrn. Caspar Neumann

von den Jahren 1678 bis 1691 verfertigten Sterbe-Register bedient, und daraus eine Ordnung der Sterblichkeit hergeleitet hat. Hernach sind in Holland, Engelland und Frankreich mehr Beobachtungen gesammlet worden, und man kan hievon folgende beyde Schriftsteller zu Rathe ziehen: Deparcieux Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. 1746. und The Valuation of Annuities upon lives, deduced from the London bills of Mortality, by J. Hogdson. 1747. Auch handelt hievon Herr Süßmilch in seiner göttlichen Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts 2 Th. 23 Cap. Durch Hülfe dieser gesamleten Beobachtungen, läst es sich ziemlich zuverläßig bestimmen, wie viele von 1000, noch sicherer, wie viele von 10000, oder 100000 Menschen, u. s. f. zu einem gewissen Alter kommen. Von 1000 gebohrnen ist nach 19 bis 20 Jahren nur etwa die Hälfte noch am Leben, nach 57 bis 58 Jahren, der vierte Theil, nach 70 bis 71 Jahren nur der achte Theil, und unter diesen tausenden wird nur einer 95 Jahr alt. Wer daher auf 1000 Gebohrne Leibrenten verkaufen will, der muß seine Rechnung so machen, als wenn jeder derselben 20 Jahre zu leben hätte. Es sterben ihrer die Hälfte früher, und immer in den ersten Jahren mehr, als in den folgenden. Im ersten Jahre sterben schon 260, im zweyten 80, im dritten 40, u. s. f. M. S. Süßmilchs göttliche Ordnung 2 Th. 22 Cap. 461 §. Also hat der Verkäufer der Rente am Ende des 20 Jahrs einen ansehnlichen Theil des Capitals übrig. Allein die andere Hälfte lebt länger, als 20 Jahre, doch sind ihrer in den folgenden Jahren immer weniger,

ger, und mit dem 95sten Jahr hört die ganze Rente auf.

Wenn nun eine Gesellschaft von Personen, die insgesamt schon zu einem gewissen Alter gekommen sind, Leibrenten kauft: so muß der Verkäufer ebenfalls wissen, in wie vieler Zeit etwa die Hälfte dieser Anzahl wird gestorben seyn. Nach der vorhin angeführten Beobachtung lebt von 500 zwanzigjährigen nach 38 Jahren nur etwa die Hälfte. Wer also an eine solche Gesellschaft Leibrenten verkauft, der muß die Rechnung so machen, als wenn jeder noch 38 Jahre zu leben hätte.

233 §.

Die Reihe der Jahre, binnen welchen die Hälfte der Anzahl einer solchen Gesellschaft stirbt, kan man als die mittlere Dauer des Lebens dieser Gesellschaft betrachten. Wenn man die Zahlen der Jahre, die jedes Mitglied für sich lebt, alle zusammen addirt, und die Summe durch die Anzahl der Personen dividirt: so komt etwa eben diese Zahl von Jahren aus, worin die Hälfte der Gesellschaft verstirbt, und nach dieser mittlern Dauer des Lebens der Leibrenten-Gesellschaft richtet sich die Rente. Sie ist bey einerley Zinsen desto höher, je kürzer diese mittlere Dauer angenommen wird. Man rechnet gewöhnlich die mittlere Dauer des menschlichen Lebens zu London kürzer, als zu Paris, und daher komt es, daß London höhere Leibrenten, als Paris giebt.

234 §.

Die Tontine ist eine besondere Art von Leibrenten-Gesellschaft, die sich dadurch von der gewöhnli-

chen unterscheidet, daß ihr das Capital und die Zinsen so lange ausgezahlet werden müssen, bis der letzte von der Gesellschaft verstorben ist; und zwar so, daß die Portionen der Absterbenden, denen, so am Leben bleiben, zufallen. Es soll ein Franzose, Namens Tonty, dem König Ludwig dem XIV den ersten Plan davon übergeben haben, und von ihm hat eine solche Einrichtung den Namen, der Tontine. Gesetzt, eine Gesellschaft bestehet aus 300 Personen, und jeder legt 100 Thlr. ein: so beträgt das zusammengebrachte Capital 30000 Thlr. Wenn nun dies Capital, nebst seinen Zinsen, zu 5 pro C. in 20 Jahren bezahlt werden soll: so ist die Annuität, oder jährliche Rente $= \frac{105^{20} \times 1500}{105^{20} - 1}$ (227 §), und man findet

$l\,105^{20} = 0,4237860$

$105^{20} - 1 = 1,6533$

$l\,1500 = 3,1760913$

$l\,105^{20} \times 1500 = 3,5998773$

$l\,105^{20} - 1 = 0,2183517$

$3,3815256$

Also die Annuität $= 2407,274$ Thlr. Diese auf 300 Personen gleich vertheilt, geben auf eines jeden Antheil 8,064 Thl., oder 8 Thl. 1 Gr. 6 Pf. Wenn nun nach 15 Jahren nur 24 davon am Leben sind: so hebt ein jeder schon jährlich eine Rente von 100 Thl. 7 Gr. 3 Pf., und auf die Art steigt die Rente, die jedes einzelne Mitglied hebt, bis endlich derjenige, so zuletzt übrig bleibt, die Rente von dem ganzen eingesetzten Capital allein bekömt.

235 §.

235 §.

Man kan nicht alle Glieder einer Tontine von allen Altern mit einander vermischen. Die jüngern würden dabey allein Vortheil haben, und die alten beständig verlieren. Deswegen werden die Mitglieder nach ihrem verschiedenen Alter in Classen vertheilt, gewöhnlich von 5 zu 5 Jahren. Besteht die Gesellschaft aus 10000 Personen, die in 20 verschiedenen Classen vertheilt sind: so kan man, vermöge der durch die Erfahrung bestätigten Ordnung der Sterblichkeit, sicher annehmen, daß sie allesamt, höchstens mit dem 95 Jahre werden ausgestorben seyn. Gesetzt auch, daß in einer, oder zwey Classen einer 100 Jahre alt wird: so werden doch die meisten übrigen eher, und noch wohl vor dem 90sten Jahre erloschen seyn. Folglich wird der Verkäufer keine Gefahr laufen, wenn er 95 Jahre als das äusserste Ziel aller Classen annimt. Wenn also die erste Classe aus Kindern, bis zu 5 Jahren bestehet: so wird selbige noch 90 Jahre dauren. Eine Classe von 30 jährigen wird 65 Jahre bestehen, u. s. f. Man muß hier, der kürzern Rechnung wegen, immer 5 Jahre für eine Classe zusammen nehmen, und alle Glieder so ansehen, als wenn sie just das mitlere Alter dieser Classe hätten. Diejenigen z. E. so zwischen 10 und 15 Jahre alt sind, werden betrachtet, als ob sie $13\frac{1}{2}$ Jahre alt wären. Dies vorausgesetzt, ist es leicht, nach dem 227 § die Rente einer jeden Classe zu berechnen, wenn die Größe des eingesetzten Capitals bekant ist. Ausführlichere Nachrichten hievon findet man bey den oben im 232 § angeführten Schriftstellern.

Weitere Ausführung der ebenen Geometrie.

Der XVI. Abschnitt.

Von den Trigonometrischen Linien, und ihren Logarithmen.

397 §.

Die Lehren, welche im III Abschnitt der Geometrie ausgeführt sind, zeigen, daß drey Stücke von dem Umfang eines Dreyecks, unter welchen wenigstens eine Seite ist, die übrigen drey bestimmen; wenn nur in dem einen besondern Fall des 78 § die daselbst angeführte Einschränkung in Betrachtung gezogen wird. Man kan daher aus dreyen solchen gegebenen Stücken die übrigen drey durch Zeichnung finden, wie am angeführten Orte gewiesen worden. Sind diese gegebenen Stücke durch Zahlen ausgedrückt: so lassen sich die übrigen drey Stücke durch Rechnung in Zahlen finden, und die Wissenschaft von den in solcher Absicht nöthigen Rechnungsregeln, heist die ebene Trigonometrie, oder auch schlechthin die Trigonometrie.

398 §.

184 F. Es sey ACB ein Winkel, aus dessen Spitze C man mit einem willkührlichen Halbmesser CA = CB einen Kreis beschrieben hat, der die Schenkel dieses Winkels in A und B schneidet. Ueberdem sey CF

auf

auf dem einen Schenkel AC des Winkels ACB senkrecht gesetzt, so, daß ACF=90° ist. Läst man von dem Punkt B, worin der Kreis den andern Schenkel CB dieses Winkels schneidet, auf die beyden Schenkel CA und CF des rechten Winkels die senkrechten Linien BD und BE fallen: so heist BD der Sinus, und BE der Cosinus nicht allein des Winkels ACB, sondern auch des Bogens AB. Es kan nemlich BE in eben dem Verstande der Sinus des Winkels BCF heissen, in welchem BD des Winkels ACB Sinus heist. Weil nun BCF des Winkels ACB Ergänzung, oder Complement zum rechten Winkel ist: so wäre eigentlich BE der Sinus von dem Complement des Winkels ACB zum rechten Winkel. Hieraus hat man verkürzt das Wort Cosinus gemacht. Wenn man alles genau nimt: so ist der Cosinus eines Winkels ACB nur eigentlich der Sinus seines Complements zum rechten Winkel, wenn ACB kleiner, als 90° ist.

Der Sinus BD des Bogens AB ist also die Hälfte der Sehne BI des doppelten Bogens BAI. Denn BD verlängert trift den Kreis in I, so, daß BD=DI, und der Bogen AB=AI wird (61. 117 §).

399 §.

Weil BECD allemahl ein Rechteck wird: so ist BE=CD, und BD=EC, so daß eine von den Linien, welche die Nahmen Sinus und Cosinus führen, allemahl die andre bestimt. So schneidet der Sinus BD auf dem Schenkel CA des rechten Winkels ein Stück CD= dem Cosinus, und der Cosinus BE auf dem andern Schenkel CF ein Stück CE= dem Sinus ab.

Das Stück AD, welches zwischen dem Endpunkt A des Halbmessers, und D des Cosinus liegt, heist der Quersinus, oder sinus versus des Winkels ACB, oder des Bogens AB. Eben so ist EF des Winkels BCF, oder des Bogens BF Quersinus, und wird auch des Winkels ACB, oder des Bogens AB cosinus versus genant, wovon nun die Ursache leicht in die Augen fällt.

Bedeutet α einen Winkel oder Kreisbogen: so werden die verkürzten Ausdrücke $\sin.\alpha$, $\cos.\alpha$, $\mathfrak{sv}.\alpha$, in der Folge gebraucht werden, den Sinus, Cosinus, oder Quersinus von α anzudeuten.

400 §.

Wenn der Winkel ACB, oder der Bogen AB, die hier kleiner, als 90° angenommen werden, abnimt: so nimt ihr Sinus BD ab, und der Cosinus CD wächst, so daß auch der Quersinus abnimt. Verschwindet ACB, oder AB: so werden Sinus und Quersinus zugleich = 0, und der Cosinus wird dem Halbmesser CA gleich, der von nun an der Kürze wegen $= r$ gesetzt werden soll.

Wächst ACB, oder AB, so wächst auch der Sinus nebst dem Quersinus, und der Cosinus nimt ab. Wird AB = AF = 90°: so wird der Sinus nebst dem Quersinus $= r$, und der Cosinus = 0. Wenn aber AB über 90° hinaus wächst: so nimt der Sinus wieder ab, und der Cosinus, welcher auf der andern Seite von CF fällt, nimt wieder zu: aber der Quersinus wird größer, als r. Wird AB = AFK = 180°: so wird der Sinus wieder = 0, der Cosinus $= -r$, mit entgegengesetzter Lage; der Quersinus aber wird dem Durchmesser AK $= 2r$ gleich.

401 §

401 §.

Der Sinus *BD* des Bogens *AB* ist kleiner, als der doppelte Sinus *BN* seiner Hälfte *BM*, wenn $AB < 90°$ ist.

Beweis. Der Sinus BN geht verlängert durch A so, daß $AB = 2BN$ ist. Da nun $BD < AB$ (75§): so ist $BD < 2BN$.

402 §.

Der Quersinus *MN* des halben Bogens *BM* ist kleiner, als die Hälfte vom Quersinus *AD* des ganzen Bogens *AB*, wenn $AB < 90°$ ist.

Beweis. Mit dem Halbmesser CD sey der Kreisbogen DQ beschrieben; der Halbmesser CM schneide diesen Bogen in Q, den Sinus BD in R: so ist $AD = MQ$, und $CQ < CR$. Durch N ziehe man NP mit AD parallel: so ist $NP = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} MQ$ (211§). Aber $NR > NP$, also $NR > \frac{1}{2} MQ$, folglich $MN + RQ < \frac{1}{2} MQ$, und um so mehr $MN < \frac{1}{2} MQ$, oder $MN < \frac{1}{2} AD$.

Demnach kan man durch fortgesetzte Halbirung eines Bogens allemahl auf einen solchen Bogen kommen, dessen Quersinus kleiner, als eine gegebene Linie ist; und wenn eine Linie kleiner ist, als der Halbmesser: so kan man allemahl einen Bogen finden, dessen Cosinus CD größer ist, als diese Linie.

403 §.

Zweene Winkel *ACB*, *ACG*, die einander zu 180° ergänzen, haben gleich grosse Sinus.

Beweis. Weil $ACB + ACG = 180°$, und überdem $ACG + GCK = 180°$: so ist $ACB + ACG =$

ACG + GCK, folglich ACB = GCK. Ferner ist BC = GC, und BDC = 90° = GHC, also GH = BD (90 §).

Diese beyden Sinus haben in Ansehung des Durchmessers AK einerley Lage, sie stehen beyde auf einer Seite desselben.

404 §.

Die Cosinus zweener Winkel *ACB*, *ACG*, die einander zu 180° ergänzen, haben ebenfalls einerley Größe, obgleich nicht einerley Lage.

Beweis. Es folgt aus dem Beweise des vorigen Satzes, daß auch CH = CD, oder GE = BE sey. Also sind die Cosinus beyder Winkel ACB, ACG gleich groß. Aber der eine liegt auf der einen, der andre, auf der andern Seite des Durchmessers FL. Wenn demnach die Cosinus der spitzen Winkel mit + bezeichnet werden: so sind die Cosinus der stumpfen Winkel, die kleiner, als 180° sind, negativ, so daß z. E. cos. 120° = − cos. 60° ist.

Der Cosinus CH oder EG des stumpfen Winkels ACG ist eigentlich nicht mehr der Sinus des Complements von ACG zum rechten Winkel, denn ACG ist selbst schon größer, als 90°. Inzwischen ist er dem Cosinus eines Winkels ACB gleich, der ACG zu 180° ergänzt, und mit ACG einerley Sinus hat. Siehet man also nicht auf die Lage dieses Cosinus, die der Lage des Cosinus von ACB entgegengesetzt ist; so kan man sagen, daß zweene Winkel, die einander zu 180° ergänzen, einerley Sinum und Cosinum haben. Aber die Quersinus beyder Winkel sind um den doppelten Cosinus unterschieden.

405 §.

Wenn ein Winkel, wie ACG > 180° wird, also der Punkt G über K hinaus nach Y rückt: so wird sein Sinus HY negativ, denn er fällt nun unter AK, und dieser negative Sinus wächst, bis ACY = 3 × 90° = 270° = ACL wird, und es ist sin. ACL = −r. Der Cosinus CH des erhabenen Winkels ACY ist negativ, er nimt ab, wenn ACY wächst, und wird = 0, wenn ACY = ACL = 270° wird.

Wächst nun ACL noch weiter, so daß L nach I rückt: so bleibt der Sinus ID negativ, und nimt wieder ab, er wird = 0, wenn ACL = 360° wird, da I in A fällt. Der Cosinus CD des Winkels ACI der > 270° ist, wird wieder positiv, und wächst mit dem Winkel, bis er = +r wird, wenn ACI = 360° ist.

Die Cosinus zweener Winkel, wie ACG, und der erhabene Winkel ACY, die einander zu 360° ergänzen, haben einerley Größe, und Lage. Ihre Sinus sind zwar auch gleich groß, aber einander entgegengesetzt. So ist z. E. cos. 200° = cos. 160°, sin. 200° = − sin 160°, und cos. 310° = cos. 50°, sin 310° = − sin 50°.

Ein negativer Winkel hat mit dem ihm gleichen entgegen gesetzten Winkel einerley Cosinus der Grösse und Lage nach: aber einen gleichen und entgegengesetzten Sinus.

406 §.

Jeder Sinus *BD* ist kleiner, als sein Bogen *AMB*. Aber der Unterschied des halben Bogens *BM* von seinem Sinus *BN* ist nicht halb so groß, als der Unterschied des ganzen

Bogens

Bogens *AMB* von seinem Sinus *BD*, wenn *AMB* < 90° ist.

Beweis. Es ist die Sehne BI < Bog. BAI, also $\frac{1}{2}$BI < $\frac{1}{2}$BAI, oder BD < AMB. Ist nun BM = MA, so geht BN verlängert durch A, und es ist AB > BD, also $\frac{1}{2}$AB > $\frac{1}{2}$BD, und $\frac{1}{2}$AMB − $\frac{1}{2}$AB < $\frac{1}{2}$AMB − $\frac{1}{2}$BD, oder BM − BN < $\frac{1}{2}$(AMB − BD).

Bey jeder Halbirung eines Kreisbogens, der kleiner als 90° ist, geht also von der Differenz zwischen dem Bogen, und seinem Sinus mehr, als die Hälfte ab. Deswegen kan man durch fortgesetzte Halbirung eines Kreisbogens allemahl auf einen solchen Bogen kommen, dessen Differenz von seinem Sinus kleiner, als eine gegebene Linie ist.

407 §.

184 F. Wenn, wie bisher, zwischen den Schenkeln des Winkels ACB mit einem willkührlichen Halbmesser CA = *r* der Bogen AB beschrieben, und durch A eine Tangente des Kreises gezogen ist, welche den andern Schenkel CB in T schneidet: so heist AT die Tangente, und CT die Secante des Winkels ACB, oder des Bogens AB. Steht auch, wie vorhin, der Durchmesser FL auf AK senkrecht, und man ziehet durch F eine Tangente des Kreises, welche CT in V schneidet: so ist FV die Tangente, und CV die Secante des Winkels FCB, oder des Bogens FB. Aber FCB ergänzt ACB zu 90°, und FB den Bogen AB zum Quadranten. Deswegen heist FV die Cotangente, und CV die Cosecante des Winkels ACB, oder Bogens AB, und diese Namen haben eben den Ursprung, wie der Name Cosinus, im

398 §. Die verkürzten Ausdrücke tang. α, cot. α, sec. α, cosec. α bedeuten eines Winkels, oder Bogens α Tangente, Cotangente, Secante, oder Cosecante, auf ähnliche Art, wie die verkürzten Ausdrücke sin. α, cos. α, sv. α gebraucht werden.

Man kan füglich überhaupt alle diese Linien Trigonometrische Linien nennen, weil sie in der Folge zur Berechnung der Seiten und Winkel der Dreyecke dienen werden.

408 §.

Es sey nun zuerst der Winkel ACB, oder Bogen AB kleiner, als 90°: so erhellet, daß seine Tangente AT wachse, wenn ACB, oder AB wächst. Der Durchschnittspunct T entfernt sich immer mehr von A, je mehr ACB, oder AB zunimt. Wenn ACB, oder AB = 90° wird: so giebt es gar keinen Durchschnittspunct mehr (80 §), und AT wird grösser, als jede Linie, die sich angeben läst. Demnach ist die Tangente eines rechten Winkels unendlich groß. Die Cotangente FV nimt ab, wenn AB wächst, und verschwindet, wenn ACB = 90° ist. Nimt aber ACB ab: so wird AT kleiner, und diese Tangente verschwindet mit dem Winkel ACB, oder Bogen AB. Da aber zugleich FCB zunimt: so wächst die Cotangente FV, wenn AB kleiner wird, und wird unendlich groß, wenn AB verschwindet. Dieserwegen hat man tang. 0° = 0, cot. 0° = ∞, tang. 90° = ∞, cot. 90° = 0. Wenn AB über 90° wächst: so fällt der Durchschnittspunct T unterhalb A in S so, daß die Tangente AS eines stumpfen Winkels ACG, oder Bogens, der grösser, als 90° ist, eine entgegengesetzte Lage bekomt, eben so,

wie

wie die Cotangente FW, die ebenfalls auf der andern Seite von F fällt. Beyde sind also negativ, wenn AT und FV positiv genommen werden. Uebrigens nimt nun die Tangente AS ab, und die Cotangente FW wächst, wenn ACG gröſſer wird, bis endlich, wenn ACG = 180° wird, die Tangente verschwindet, und die Cotangente unendlich groß wird.

Die Secante CT wächst mit dem Winkel ACB, und der Tangente AT, und nimt mit ihnen ab. Wenn ACB verschwindet, ist sie dem Halbmesser gleich, unendlich groß aber für ACB = 90°. Sie fällt auf der entgegen gesetzten Seite für stumpfe Winkel ACG, und wird wieder = r, wenn ACG = 180° ist. Die Cosecante CV ist unendlich groß, für ACB = 0, sie nimt ab, wenn AB wächst, und ist = r für AB = 90°. Sie behält einerley Lage für ACG > 90°, und wächst, wenn ACG wächst, bis sie für ACG = 180° unendlich groß wird.

409 §.

Die Tangenten, Secanten, Cotangenten und Cosecanten zweener Winkel *ACB* und *ACG*, die einander zu 180° ergänzen, sind gleich groß, mit dem Unterschied, daß die drey ersten eine entgegen gesetzte Lage haben (408 §).

Beweis. Weil auch ACG + GCK = 180°, und also ACB = GCK = ACS: so ist in den Dreyecken ACT und ACS, die Seite AT = AS, und CT = CS (90 §). Weil überdem ACB + FCB = 90° = FCG + GCK, und ACB = GCK: so ist FCB = FCG, und dieserwegen in den Dreyecken FCV, FCW die Seite FV = FW, und CV = CW (90 §).

410 §.

410 §.

Die Tangente *AV* des halben Bogens *AE* ist kleiner, als die Hälfte der Tangente *AT* des ganzen Bogens *AB*, wenn $AB < 90°$ ist. 186 F.

Beweis. Man kan durch V eine zweyte Tangente BV des Kreises ziehen (126 §), diese gehet durch B (127 §), und es ist $BV = AV$. Aber $BV < VT$, also auch $AV < VT$, oder $AV < \frac{1}{2}AT$.

411 §.

Jede Tangente *AV* ist grösser, als ihr Bogen: aber der Unterschied des halben Bogens *AE* von seiner Tangente *AV* ist nicht halb so groß, als der Unterschied des ganzen Bogens *AB* von seiner Tangente *AT*, wenn die Bogen kleiner, als 90° sind. 186 F.

Beweis. Man ziehe durch V die zweyte Tangente BV: so ist $AV + BV > AB$, und $AV = BV$ (127 §). Also $2AV > 2AE$, und $AV > AE$. Weil ferner $AV < \frac{1}{2}AT$ (410 §): so ist $AV - \frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}AT - \frac{1}{2}AB$, oder $AV - AE < \frac{1}{2}(AT - AB)$.

Durch fortgesetzte Halbirung eines Kreisbogens kan man also allemal auf einen solchen Bogen kommen, dessen Unterschied von seiner Tangente kleiner, als eine gegebene Linie ist. Und weil bey jeder Halbirung auch von dem Unterschied des Sinus und Bogens mehr, als die Hälfte abgehet: so wird zugleich jedesmal der Unterscheid des Sinus und der Tangente, um mehr, als die Hälfte kleiner. Denn es sey d des Sinus, und δ der Tangente Differenz von dem Bogen: so ist der Sinus und der Tangen-

te

te Differenz $= d + \delta$. Aber bey jeder Halbirung geht sowohl von d, als von δ mehr, als die Hälfte ab. Demnach kan man auch allemal auf einen Bogen kommen, dessen Sinus und Tangente um weniger, als eine gegebene Linie unterschieden sind.

412 §.

186 F. Das Stück EV, um welches die Secante CV des halben Bogens AE den Halbmesser übertrift, ist kleiner, als die Hälfte der Differenz BT, der Secante CT des ganzen Bogens AB vom Halbmesser: es wird aber noch $AB < 90°$ angenommen.

Beweis. Der Sinus EF des Bogens AE treffe verlängert die Secante CT in G: so ist $AD : AF = BT : GT$ (205 §). Da nun $AF < \frac{1}{2} AD$ (402 §): so ist auch $GT < \frac{1}{2} BT$. Nun sey GH mit CV parallel: so ist $GHT = CVT$, also $GHT > 90°$, und $GH < GT$ (75 §), folglich auch $EV < GT$, weil $EV = GH$ (98 §), oder $EV < \frac{1}{2} BT$.

Durch fortgesetzte Halbirung eines Kreisbogens kan man allemahl auf einen solchen Bogen kommen, dessen Secante vom Halbmesser weniger, als eine gegebene Linie unterschieden ist, und wenn eine Linie grösser ist, als der Halbmesser: so kan man allemal auf einen Bogen kommen, dessen Secante kleiner, als diese Linie ist.

413 §.

184 F. Wenn der Winkel ACG, wie im 405 §, über 180° wächst, und G durch K nach Y rückt: so fällt der Durchschnittspunct des Schenkels CY mit der Tangente wiederum oberhalb A. Die Tangente AT

ist

ist also wieder positiv so, wie die Cotangente FV. Jene wächst mit ACY, diese aber nimt ab. Wird der erhabene Winkel ACY = ACL = 270°: so wird die Tangente = ∞, die Cotangente = 0.

Wächst ACL noch weiter, und wird der erhabene Winkel ACI > 270°: so werden seine Tangente AS, und Cotangente FW wieder negativ. Diese wächst mit dem Winkel, und jene nimt ab. Wird ACL = 360°: so wird die Tangente = 0, und die Cotangente = ∞.

Zwey Winkel, wie ACG, ACY, oder ACB, ACI, (wo ACY und ACI erhabene Winkel sind) die einander zu 360° ergänzen, haben gleich grosse, aber entgegen gesetzte Tangenten und Cotangenten.

Ein negativer Winkel hat mit dem ihm gleichen entgegen gesetzten Winkel eine gleiche, aber entgegengesetzte Tangente und Cotangente.

414 §.

Wenn *ACB*, *acb* gleich grosse Winkel, die Bogen *AB*, *ab* aber mit ungleichen Halbmessern *CA*, *ca* beschrieben sind, und man verzeichnet für diese Winkel, oder Bogen, die den Halbmessern *CA*, *ca* zugehörige Sinus, Cosinus, nebst den übrigen trigonometrischen Linien: so verhalten sich die Linien, die einerley Namen haben, als: die Sinus *BD*, *bd*, die Cosinus *CD*, *cd*, u. s. f. so wie die Halbmesser *CA*, *ca*. 184 185 F.

Beweis. Weil ACB = *acb*, und BDC = 90° = *bdc*: so ist das Dreyeck BDC ∽ *bdc* (210 §), also BD : *bd* = BC : *bc*, und DC : *dc* = BC : *bc*. Nun ist auch AC : *ac* = BC : *bc*, also AC − DC : *ac* − *dc* = BC :

bc (180 §), oder AD : *ad* = BC : *bc*. Wenn die Winkel ACG, *acg* stumpf sind: so bleibt der Beweis für die Sinus GH, *gh*, und Cosinus CH, *ch* derselbe; weil auch CGH ∽ *cgh*, und die genanten Linien sich wie CG : *cg* verhalten. Nur für die Quersinus schliest man so; AC : *ac* = CG : *cg*, und CH : *ch* = CG : *cg*, also AC + CH : *ac* + *ch* = AH : *ah* = CG : *cg* (178 §).

Ferner ist das Dreyeck ACT ∽ *act*, und VCF ∽ *vcf*, also AT : *at* = CT : *ct* = AC : *ac*, und FV : *fv* = CV : *cv* = CF : *cf*. Wenn auch der Winkel ACG stumpf wird: so bleibt ACS ∽ *acs*, imgleichen FCW ∽ *fcw*, also AS : *as* = CS : *cs* = AC : *ac*, und FW : *fw* = CW : *cw* = CF : *cf*.

Für Winkel die größer als 180° sind, könte man den Beweis eben so aus Betrachtung der Figur herleiten, er folgt aber auch für sich schon aus dem 405 und 413 §.

415 §.

Wenn man für einen Winkel, oder Kreisbogen den Sinus, Cosinus, oder sonst eine trigonometrische Linie in Zahlen sucht: so muß der Halbmesser in Zahlen gegeben seyn, weil die Größe dieser Linien für einerley Winkel oder Bogen durch den Halbmesser bestimt wird (414 §). Man setzt bey Berechnung dieser Linien ein für allemahl den Halbmesser = 1, und es ist einerley, ob man ihn einen Fuß, oder eine Ruthe groß sich vorstellet, oder noch eine andre Einheit, welche man will, in Gedanken hat. Die Rechnung giebt alsdenn alle trigonometrische Linien in Theilen dieser Einheit. Für jeden andern Halbmesser, und eben den Winkel kan man hiernechst

eben

eben diese Linien nach dem 414 § finden. Bey den folgenden Sätzen wird also der Halbmesser allemahl = 1 genommen werden; und in dieser Voraussetzung ist kein Sinus, oder Cosinus größer, als 1. Demnach werden die Sinus, und Cosinus durch eigentliche Brüche ausgedrückt werden, wovon der sin. 90°, oder der Halbmesser das Ganze ist. Dies ist die Ursache, warum der Halbmesser auch der ganze Sinus (sinus totus) genant wird.

Bey den folgenden Untersuchungen sind also die Ausdrücke sin. α, cos. α u. s. f. allemahl für den Halbmesser = 1 zu verstehen. Und wenn Sin. α, Cos. α u. s. f. eben die Linien für einen andern Halbmesser $= r$ bedeuten: so ist sin. $\alpha = \frac{Sin.\,\alpha}{r}$, cos. $\alpha = \frac{Cos.\,\alpha}{r}$ u. s. f. wodurch also die folgenden Gleichungen leicht für den Halbmesser r verändert werden.

416 §.

Aus dem bekanten Sinus eines Winkels α den Cosinus und Quersinus eben dieses Winkels zu finden. 184 F.

Aufl. Es ist überhaupt cos. $\alpha = \sqrt{(1 - \sin.\alpha^2)}$, und Sv. $\alpha = 1 - \cos.\alpha$.

Beweis. Der sin. α, und cos. α sind allemahl zwo Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen Hypothenuse der Halbmesser = 1 ist. Deswegen hat man sin. α^2 + cos. $\alpha^2 = 1$ und cos. $\alpha = \sqrt{(1 - \sin.\alpha^2)}$. Ferner ist AD = AC − CD, d. i. Sv. $\alpha = 1 - \cos.\alpha$, wenn ACB = α gesetzt wird. Ueberdem ist AH = AC + CH, oder Sv. ACG = 1 + cos. α,

d. i. $1 - (-\cos.\alpha)$, daß also auch sv. ACG $= 1 -$ cos. ACG bleibt. So ist auch sv. ACY $= 1 -$ cos. ACY, und sv. ACI $= 1 -$ cos. ACI. Demnach kan α in dem Ausdruck sv. $\alpha = 1 -$ cos. α auch stumpfe Winkel bedeuten.

Wenn man also für jeden Winkel den Sinus berechnen kan: so hat man durch Hülfe dieser Aufgabe zugleich den Cosinus und Quersinus. Ja selbst der Ausdruck $\cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}$ dienet, die Sinus aller Winkel, die größer, als 45° sind, zu finden, wenn die Sinus der Winkel unter 45° schon bekant sind. Denn die Sinus der Winkel über 45° sind die Cosinus der Winkel unter 45°.

Wenn der Cosinus eines Winkels gegeben ist: so läst sich auf eine ähnliche Art der Sinus desselben finden. Denn weil allemahl $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$; so ist auch $\sin\alpha = \sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}$.

417 §.

184 F. Aus dem Sinus und Cosinus eines Winkels $ACB = \alpha$ die Tangente zu finden.

Aufl. Weil das Dreyeck ACT ∽ BCD, so ist CD:BD = AC:AT, oder $\cos\alpha : \sin\alpha = 1 : \text{tang}\,\alpha$.

Also $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Dies bleibt noch für die stumpfen Winkel ACG richtig, weil das Dreyeck ACS ∽ CGH.

418 §.

Aus der Tangente die Cotangente zu finden.

Aufl. Es ist das Dreyeck ACT ∽ FCV, also AT:AC = CF:FV, oder $\text{tang}\,\alpha : 1 = 1 : \cot\alpha$ und

$\cot\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha}$.

Weil

Weil $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (417 §): so ist auch $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, daß man also die Cotangente aus dem Sinus und Cosinus auch unmittelbar haben kan.

Man hat demnach umgekehrt $\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ und überhaupt das Rectangel $\text{tang}\,\alpha \times \cot\alpha$ (248 §) = dem Quadrat des Halbmessers: und wenn β ein andrer Winkel, oder Kreisbogen ist: so hat man $\text{tang}\,\alpha \cot\alpha = 1^2 = \text{tang}\,\beta \cot\beta$, und $\text{tang}\,\alpha : \text{tang}\,\beta = \cot\beta : \cot\alpha$.

Man kan ferner umgekehrt den Sinus eines Winkels aus dem Cosinus, und der Tangente, oder der Cotangente, so wie den Cosinus aus dem Sinus und der Cotangente, oder Tangente finden. Aus $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ folgt nemlich $\sin\alpha = \cos\alpha\,\text{tang}\,\alpha = \cos\alpha \times \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$ und aus $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ folgt $\cos\alpha = \sin\alpha \cot\alpha = \sin\alpha \times \frac{1}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\text{tang}\,\alpha}$.

419 §.

Aus der Tangente die Secante, und aus der Cotangente die Cosecante zu finden.

Aufl. Weil $CT = r(AC^2 + AT^2)$ (283 §): so ist $\sec\alpha = r(1 + \text{tang}\,\alpha^2)$, und weil aus eben der Ursache $CV = r(CF^2 + FV^2)$: so ist $\text{cosec}\,\alpha = r(1 + \cot\alpha^2)$.

Demnach ist umgekehrt $\text{tang}\,\alpha = r(\text{sec}\,\alpha^2 - 1)$ und $\text{cot}\,\alpha = r(\text{cosec}\,\alpha^2 - 1)$.

420 §.

Aus dem Cosinus die Secante, und aus dem Sinus die Cosecante zu finden.

Aufl. Weil das Dreyeck ACT ∽ BCD; so hat man CD : CB = CA : CT, oder $\cos\alpha : 1 = 1 : \text{sec}\,\alpha$, also $\text{sec}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$. Weil ferner das Dreyeck FCV ∽ BCD: so ist BD : BC = FC : CV, oder $\sin\alpha : 1 = 1 : \text{cosec}\,\alpha$, also $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Demnach ist auch umgekehrt $\cos\alpha = \frac{1}{\text{sec}\,\alpha}$, und $\sin\alpha = \frac{1}{\text{cosec}\,\alpha}$, welche Ausdrücke dazu dienen, aus der Secante und Cosecante den Cosinus und Sinus zu finden.

421 §.

Die Aufgaben des 416 bis 420 § sind insgesamt so allgemein, daß α auch stumpfe und erhabene Winkel bedeuten kan, welches eine kleine Ueberlegung leicht zeigt, und nur, um Weitläuftigkeit zu vermeiden, nicht jedes mahl besonders erinnert ist. Zugleich erhellet aus den bisherigen Lehren, daß man alle trigonometrische Linien eines jeden Winkels, oder Kreisbogens, berechnen könne, wenn man nur dieses Winkels Sinus hat: so wie überhaupt, wenn nur eine trigonometrische Linie eines Winkels bekant ist, vermittelst der im 416 bis zum 420 § vorgetragenen

genen Aufgaben alle übrige zu eben dem Winkel gehörige gefunden werden können.

Demnach bleibt noch zu untersuchen übrig, wie man die Sinus finden könne. Ueberhaupt aber braucht man die trigonometrischen Linien nur für die spitzen Winkel zu berechnen, weil für Winkel, die größer als 90° sind, dieselben Linien wieder kommen. Ausser dem ganzen Sinus läst sich nur noch ein einziger andrer Sinus in Rational-Zahlen genau ausdrücken, und dies ist der sin 30°.

Es ist nemlich $\sin 30° = \frac{1}{2}$, oder in Decimalbrüchen $\sin 30° = 0,5$, also $\cos 30° = r\frac{3}{4} = r0,75$.

Beweis. Es sey $ACM = 30°$: so ist $MCF = 60°$, und die Sehne $MF =$ dem Halbmesser $F. = CM$. Ferner sey MO auf CF senkrecht: so ist $CO = \frac{1}{2}$ CF, oder $\sin ACM = \frac{1}{2}$; folglich $\cos ACM = r\frac{3}{4} = r0,75$ (416 §). 184

422 §.

Wenn $\alpha = ACB = 45°$ ist: so ist $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{2}r2$. 186 F.

Beweis. Es ist $ACB + CBD = 90°$. Demnach wird auch $CBD = 45°$, und $BD = CD$ (56 §) oder $\sin 45° = \cos 45°$, also $2 \sin (45°)^2 = 1$ (416 §). Folglich $\sin 45° = r\frac{1}{2} = r\frac{2}{4} = \frac{1}{2}r2$.

Also ist $\tang 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1 = \cot 45°$, wie auch leicht aus der Zeichnung erhellet.

423 §.

Wenn die Sinus und Cosinus zweener Winkel $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$ gegeben sind, 187 188 den F.

den Sinus und Cosinus der Summe oder der Differenz beyder Winkel zu finden.

187 Aufl. Es sey BE = sin α, CE = cos α, und
F. nachdem man den Halbmesser CB gezogen, sey DG auf demselben senkrecht gesetzt: so ist DG = sin β, CG = cos β. Ferner sey DF auf AC senkrecht, und schneide CB in L: so ist ACD = α + β, DF = sin (α + β), CF = cos (α + β). Aus G sey GH auf AC und GK auf DF senkrecht gesetzt: so hat man BC : BE = GC : GH (210 §), oder 1 : sin α = cos β : GH, also GH = sin α. cos β = KF. Ferner sind die Winkel bey L, in den rechtwinklichten Dreyecken DGL, FCL gleich, also ist der Winkel ACB = GDK, und das Dreyeck BCE ∽ DKG. Demnach wird BC : CE = DG : DK, oder 1 : cos α = sin β : DK, also DK = cos α sin β. Dies giebt FK + DK = DF = sin α. cos β + cos α. sin β = sin (α + β). Ferner hat man BC : CE = CG : CH, oder 1 : cos α = cos β : CH, also CH = cos α cos β. Ueberdem BC : BE = DG : GK, oder 1 : sin α = sin β : GK, also GK = sin α sin β. Folglich CH − HF = CF = cos α cos β − sin α sin β = cos (α + β).

188 Es sey nun in der 188 Fig. AB = α, BD = β: so
F. wird AD = α − β, BE = sin. α, CE = cos. α, DG = sin. β, CG = cos. β, DF = sin. (α − β), CF = cos. (α − β). Man hat aber ebenfalls die Proportion BC : BE = GC : GH, oder 1 : sin α = cos β : GH, also GH = FK = sin α. cos β. Ferner stosse BC mit DF in L zusammen: so ist der Winkel ACG = LGK = GDK, und das rechtwinklichte Dreyeck DKG ∽ BCE, also BC : CE = DG : KD, oder 1 : cos α = sin β : KD, und KD = cos α. sin β. Dies giebt FK − KD = DF = sin α. cos β − cos α sin β = sin (α − β). Ueber-

dem

dem BC : CE = CG : CH, oder 1 : cos α = cos β : CH, also CH = cos α. cos β, und BC : BE = DG : GK, oder 1 : sin α = sin β : GK, also GK = HF = sin α. sin β. Daraus folgt CF = CH + AF = cos α cos β + sin α sin β = cos (α − β).

Die letzten beyden Gleichungen sind nur deswegen aus Betrachtung der Figur hergeleitet worden, um zu zeigen, wie vortreflich die Geometrie mit den Lehren der allgemeinen Rechenkunst übereinstimme, und wie sehr die letztere die geometrischen Beweise verkürze. Wenn sonst in den Gleichungen sin (α + β) = sin α. cos β + cos α. sin β; cos (α + β) = cos α cos β − sin α sin β nur − β stat + β geschrieben wird: so folgen daraus nach dem letzten Satz des 405 § unmittelbar die Gleichungen:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Durch Hülfe dieser Aufgabe könte man also aus dem Sinus und Cosinus von 45° und 30° (421. 422 §) den Sinus und Cosinus von 75° und 15° finden.

424 §.

Aus dem Sinus und Cosinus eines Winkels α, den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels 2α zu finden.

Aufl. Weil sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β, und cos (α + β) = cos α cos β − sin α sin β: so setze man α = β, und man erhält sin 2α = 2 sin α cos α; cos 2α = cos α² − sin α².

425 §.

Aus dem Cosinus eines Winkels γ den Sinus und Cosinus seiner Hälfte zu finden.

Aufl.

Aufl. Weil $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, und $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$: so ist $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$. Man setze nun $\alpha=\beta=\frac{1}{2}\gamma$: so ist $\alpha-\beta=0$, und $\cos(\alpha-\beta)=1$ (400 §). Ferner ist $\alpha+\beta=\gamma$, und man erhält $1+\cos\gamma=2(\cos\frac{1}{2}\gamma)^2$, also $\cos\frac{1}{2}\gamma=r\frac{1+\cos\gamma}{2}$. Ueberdem ist $\sin\frac{1}{2}\gamma^2=1-(\cos\frac{1}{2}\gamma)^2$ (416 §) $=\frac{1-\cos\gamma}{2}$, also $\sin\frac{1}{2}\gamma=r\frac{1-\cos\gamma}{2}$.

Diese Auflösung läst sich auch aus dem 284 § herleiten.

426 §.

Aus dem Sinus eines Kreisbogens oder Winkels α, und dem Sinus des doppelten Bogens 2α die Differenz des Sinus und der Tangente des Bogens α zu finden.

Aufl. Weil $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ (424 §), und $\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tang\alpha}$ (418 §): so ist $\sin 2\alpha=\frac{2(\sin\alpha)^2}{\tang\alpha}$. Dies giebt $\tang\alpha:\sin\alpha=2\sin\alpha:\sin 2\alpha$, also $\tang\alpha-\sin\alpha:\sin\alpha=2\sin\alpha-\sin 2\alpha:\sin 2\alpha$, und $\tang\alpha-\sin\alpha=\frac{(\sin\alpha-\sin 2\alpha)\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Vermittelst dieser Aufgabe könte man also die Tangente berechnen: aber sie hat noch einen andern Nutzen, der sich bald näher ergeben wird.

427 §.

427 §.

Durch Hülfe der Aufgaben des 423, 424 und 425 § kan man die Sinus, und hiernächst die übrigen Trigonometrischen Linien für alle Winkel von 0° bis zu 90°, von Minute zu Minute berechnen, wenn man dabey folgender Gestalt zu Werke gehet.

Aus dem bekanten Cosinus des Winkels von 45° berechne man den Cosinus der Hälfte dieses Winkels, nemlich von $22\frac{1}{2}°$, ferner den Cosinus von $11\frac{1}{4}°$ u. s. f. bis man auf einen Winkel komt, der kleiner, als eine Minute ist: so erhält man folgende Cosinus

$\cos 45° = 0{,}7071067812$
$\cos 22°30' = 0{,}9238795325$
$\cos 11°15' = 0{,}9807852804$
$\cos 5°37'30'' = 0{,}9951847266$
$\cos 2°48'45' = 0{,}9987954562$
$\cos 1°24'22''30''' = 0{,}9996988187$
$\cos 42'11''15''' = 0{,}9999247018$
$\cos 21'5''37'''30'''' = 0{,}9999811752$
$\cos 10'32''48'''45'''' = 0{,}9999952938$
$\cos 5'16''24'''22\frac{1}{2}'''' = 0{,}9999988234$
$\cos 2'38''12'''11\frac{1}{4}'''' = 0{,}9999997058$
$\cos 1'19''6'''5\frac{5}{8}'''' = 0{,}9999999264$
$\cos 39''33'''2\frac{13}{16}'''' = 0{,}9999999816$

Für die drey letzten Winkel ergeben sich zugleich folgende Sinus:

$\sin 2'38''12'''11\frac{1}{4}'''' = 0{,}000766990322$
$\sin 1'19''6'''5\frac{5}{8}'''' = 0{,}000383495 1875$
$\sin 39''33'''2\frac{13}{16}'''' = 0{,}000191747 5973$

Die Zahlen, welche diese drey letzten Sinus ausdrücken, verhalten sich fast, wie die zugehörigen Bogen.

gen. So ist die zwote fast doppelt so groß, als die dritte, und die erste ebenfalls fast doppelt so groß, als die zwote, indem die erste in der eilften Decimalstelle von der doppelten zwoten nur abweicht. Eigentlich aber kan der Sinus des doppelten Bogens nicht völlig doppelt so groß, als der Sinus des einfachen Bogens seyn (401 §). Dies findet sich auch in dem gegenwärtigen Fall in Ansehung der letzten beyden Sinus wirklich so, wenn man beyde Sinus auf mehr Decimaltheile berechnet. Man weis aber, daß durch fortgesetzte Halbirung eines Kreisbogens der Unterschied zwischen Bogen und Sinus kleiner, als jede gegebene Linie werden kan (406 §). Wenn demnach Bogen und Sinus einander so nahe kommen, daß sie um einen gewissen Theil des Halbmessers nicht mehr unterschieden sind: so werden die Zahlen, welche die Sinus in diesen Theilen des Halbmessers ausdrücken, sich wie die Bogen verhalten, und der Sinus des doppelten Bogens wird in diesen Theilen des Halbmessers eben so groß, als der doppelte Sinus des einfachen gefunden werden müssen. Man kan aber auch umgekehrt schliessen: Wenn der Sinus des doppelten Bogens vom doppelten Sinus des einfachen um einen gewissen Theil des Halbmessers nicht unterschieden ist: so ist auch der einfache Bogen von seinem Sinus nicht um eben diesen Theil des Halbmessers unterschieden. Dies wird durch einen leichten Schluß aus folgendem Satz erhellen.

428 §.

Der Unterscheid zwischen der Tangente und dem Sinus des einfachen Bogens a ist kleiner, als der Unterschied zwischen dem doppelten Sinus

Sinus eben dieses Bogens α und dem Sinus des doppelten Bogens 2α, wenn $\alpha < 45°$ ist.

Beww. Es ist $\text{tang}\alpha - \sin\alpha = \frac{(2\sin\alpha - \sin 2\alpha)\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$ (426 §). Aber so lange $\alpha < 45°$, und folglich $2\alpha < 90°$ ist, so lange ist $\sin 2\alpha > \sin\alpha$ (400 §). Folglich ist $\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$ ein eigentlicher Bruch, und dieserwegen $\text{tang}\alpha - \sin\alpha < 2\sin\alpha - \sin 2\alpha$.

Der Unterscheid zwischen Bogen und Sinus ist kleiner, als der Unterscheid zwischen der Tangente und dem Sinus (411. 406 §). Also wird noch um so mehr $\alpha - \sin\alpha < 2\sin\alpha - \sin 2\alpha$ seyn.

Beträgt $2\sin\alpha - \sin 2\alpha$ weniger, als einen gegebenen Theil, z. E. 0. 0000000001 des Halbmessers: so wird auch der Unterscheid zwischen den Bogen α und seinem Kreis weniger, als eben diesen Theil des Halbmessers betragen, welches der am Ende des vorigen § behauptete Satz ist.

429 §.

Nun ergiebt sich aus dem 427sten Paragraph $2\sin 39''\,33'''\,2\frac{13}{16}'''' - \sin 2(39''\,33'''\,2\frac{13}{16}'''') < 0{,}0000000001$, auch noch $2\sin 1'\,19''\,6'''\,5\frac{5}{8}'''' - \sin 2(1'\,19''\,6'''\,5\frac{5}{8}'''') < 0.0000000001$, wo der Halbmesser $= 1$ ist. Demnach sind die beyden Sinus von $39''\,33'''\,2\frac{13}{16}''''$, und von $1'\,19''\,6'''\,5\frac{5}{8}''''$ um weniger, als ein zehntausend Milliontheichen des Halbmessers von ihrem Bogen unterschieden. Hieraus folgt, daß auch die zwischen diesen beyden fallende

lende Bogen eben so wenig von ihrem Sinus unterschieden sind. Aber die Bogen sind den Winkeln proportional; also findet man den Bogen von 1 Minute aus dem Bogen von $39''\,33'''\,2\frac{1}{16}''''$ nach der Regel Detri, in 0′ 0000000001 Theilen des Halbmessers richtig, und eben die Zahl, welche diesen Bogen ausdrückt, drückt zugleich den Sinus von einer Minute aus. Die Rechnung selbst kan man so führen. Weil $45° = \frac{1}{2}R$; $22°\,30' = \frac{1}{4}R$ u. s. f.: so wird $39''\,33'''\,2\frac{1}{16}'''' = \frac{1}{81920}R$. Da nun $1' = \frac{1}{54000}R$: so schliest man

$$\frac{1}{81920} : \frac{1}{54000} = 0,000191747\,59 : \sin 1',$$

und dies giebt $\sin 1' = 0,000290888\,1$.

430 §.

Aus dem $\sin 1'$ erhält man den $\cos 1'$ aus dem 416 §, und hierauf den $\sin 2'$, und $\cos 2'$ aus dem 424 §, da sich dann ferner der Sinus und Cosinus von $3' = (2+1)'$ aus dem 423 § ergiebt. Man siehet leicht, daß man so fortfahren, und die folgenden Sinus und Cosinus von Minute zu Minute durch Hülfe der beyden Aufgaben des 424 und 423 § finden könne. Fährt man so fort bis zu 45°: so sind alle Sinus und Cosinus bis zu 90° gefunden.

Wenn diese Rechnung nur bis zu 30° fortgesetzt ist; so ergeben sich die übrigen Sinus, und Cosinus bis zu 45° durch eine leichte Addition und Subtraction. Weil nemlich $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$, und $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$: so wird $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$. Weil ferner $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$

und

und $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$ (423 §); so wird $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

Man setze nun $\alpha = 30°$: so ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, und man erhält $\cos\beta = \sin(30°+\beta) + \sin(30°-\beta)$, $\sin\beta = \cos(30°-\beta) - \cos(30°+\beta)$. Dies giebt $\sin(30°+\beta) = \cos\beta - \sin(30°-\beta)$ und $\cos.(30°+\beta) = \cos(30°-\beta) - \sin\beta$. Wenn nun statt β nach und nach $1'$, $2'$, u. s. f. bis $15°$ gesetzt wird: so erhält man die Sinus und Cosinus bis zu $45°$, wenn sie für kleinere Winkel als $30°$ schon berechnet sind.

431 §.

Aus dem berechneten Sinus und Cosinus werden nun die übrigen trigonometrischen Linien nach den Regeln gefunden, die im 416 bis 420 § erklärt sind. Man hat alle diese Linien würklich berechnet, und die gefundenen Zahlen in Tafeln gebracht, die den sogenanten Canon der Sinus und Tangenten ausmachen. Für den Halbmesser $= 1$ hat man alle diese Linien bis auf 10 Decimalstellen, oder $\frac{1}{10000000000}$ Theile des Halbmessers berechnet, daher man alle diese Zahlen in den Tafeln als ganze Zahlen ansehen kan, wenn der Halbmesser $= 10000000000$ ist (414 §). In den kleinern Ausgaben der Tafeln sind die drey letzten Ziffern weggelassen, und der Halbmesser ist $= 10000000$ angenommen, weil der gemeinste Gebrauch selten eine größere Schärfe erfodert.

432 §.

Es ist aber eine ziemlich langweilige, und beschwerliche Arbeit, wenn man Zahlen, die aus 7

und

und mehr Ziffern bestehen durch einander multipliciren und dividiren muß, und dies wird fast allemahl bey denjenigen Rechnungen erfodert, wo die Zahlen, welche die trigonometrischen Linien ausdrücken, gebraucht werden. Dies bewog Nepern auf Vortheile und Verkürzungen bey diesen Rechnungen zu denken, und er ward dadurch auf die Erfindung der Logarithmen geleitet. Er berechnete für diese Linien die Logarithmen, damit man mit ihnen statt der Zahlen selbst rechnen könnte, und dies vornemlich zum Gebrauch in der Astronomie. Im 146 § der allgemeinen Rechenkunst ist bereits angeführet worden, daß diese seine Logarithmen von den jetzt gebräuchlichen unterschieden sind. Brigge hat statt ihrer auch für diese Linien diejenigen berechnet, die zum System gehören, dessen basis = 10 ist, und er hat dabey den Halbmesser = 10000000000 angenommen, so daß der Logarithme des ganzen Sinus = 10 wird.

433 §.

Wenn man die Zahlen, welche die Sinus ausdrücken, schon berechnet hat, so werden ihre Logarithmen eben so gefunden, wie im 154 und 155 § der allgemeinen Rechenkunst gewiesen worden, wenn man damit zufrieden ist, diese Logarithmen in den ersten 7 Decimalstellen richtig zu erhalten, und dies ist zum gemeinsten Gebrauch zulänglich. So war im 429 §. sin 1′ = 0.0002908881. Wenn also der Halbmesser = 10000000000 ist: so wird sin 1′ = 2908881, und man erhält aus den Sherwinschen Tafeln

$$l\,29088 = 4637139$$
$$8 \qquad 120$$
$$1 \qquad 1,5$$

Also $l\,2908881 = 6,4637261 = l \sin 1'$

Aus den kleinen Tafeln erhält man nach den Vorschriften des 154 und 155 §. A. R. eben diesen Logarithmen.

424 §.

Sind die Logarithmen der Sinus gefunden, so ist es leicht, die Logarithmen der Tangenten und Secanten ebenfalls zu berechnen. Weil nemlich für den Halbmesser $= 1$ im 417 § $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, und im 420 § $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ gefunden worden: so ist für den Halbmesser r nach dem 415ten §

$\frac{\text{tang}\,\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha : r}{\cos\alpha : r}$, und $\text{tang}\,\alpha = \frac{r \sin\alpha}{\cos\alpha}$,

so wie $\frac{\sec\alpha}{r} = \frac{1}{\cos\alpha : r} = \frac{r}{\cos\alpha}$, und $\sec\alpha = \frac{rr}{\cos\alpha}$. Also wird $l\,\text{tang}\,\alpha = lr + l\sin\alpha - l\cos\alpha$, und $l\sec\alpha = 2lr - l\cos\alpha$, wo $lr = 10$ ist.

Auch die Logarithmen der Quersinus ergeben sich auf folgende Art. Es ist $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ (425 §) $= \frac{\text{sv}\,\alpha}{2}$ (416 §); also $\text{sv}\,\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$,

und $\frac{sv.\alpha}{x} = \frac{2sin\frac{1}{2}\alpha^2}{rr}$. Folglich ist $sv.\alpha = \frac{2sin\frac{1}{2}\alpha^2}{r}$, und $lsv.\alpha = l2 + 2lsin\frac{1}{2}\alpha - lr$.

435 §.

Die im 151 § der allg. Rechenkunst angeführten Ausgaben der Logarithmen-Tafeln, enthalten zugleich die Tafeln der Trigonometrischen Linien, und zwar sowohl der Zahlen selbst, welche diese Linien ausdrücken, als auch ihrer Logarithmen. In Gellibrands Tafeln findet man die Trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 10000000000000, nebst ihren Logarithmen für $\frac{1}{100}$ Theile der Grade. *Adriani Vlacq* Trigonometria artificialis, seu magnus canon triangulorum Logarithmicus. Goud. 1633. enthält diese Zahlen von zehn zu zehn Secunden. Mepers Logarithmen-Tafeln der Trigonometrischen Linien waren für einzelne Minuten berechnet. Benjamin Ursinus erweiterte sie für 10 zu 10 Secunden in seiner zu Cöln 1625 herausgegebenen Trigonometrie. Unter den, vor Erfindung der Logarithmen bekant gewordenen Trigonometrischen Tafeln, sind vornemlich des Rhetici und Pitisci Arbeiten merkwürdig. Joachim Rheticus berechnete einen Canon der Sinus für den Halbmesser = 10000000000000000 von 10 zu 10 Secunden; er starb aber vor Ausgabe dieses Werks. Bartholomäus Pitiscus gab diese Arbeit des Rhetici nebst verschiedenen Erweiterungen im Jahr 1613 zu Frankfurt am Mayn heraus. Und diese Tafeln sind in vieler Absicht ungemein brauchbar. In den bekantesten, auch selbst in Sherwins Tafeln,

ist

ist der Halbmesser nur zu 10000000 Theile angenommen worden. Doch hat man die Logarithmen für den Halbmesser = 10000000000 mit getheilt, wiewohl in den Tafeln nur die ersten 7 Decimalstellen stehen. Sherwins Tafeln sind auch in Absicht dieser Logarithmen zum Gebrauch sehr bequem eingerichtet, indem die Differenzen eines jeden Logarithmen vom nächstfolgenden allemahl dabey stehen, wovon der Nutzen sogleich gewiesen werden soll. Es enthalten diese Tafeln überdem nicht allein die Logarithmen der Sinus und Tangenten; sondern auch der Secanten und Quersinus, da sie gegentheils in den kleinen bekantesten Tafeln nur für die Sinus und Tangenten mitgetheilet sind.

436 §.

Wenn man nun dergleichen Tafeln zur Hand hat: so findet man in denselben ohne Schwierigkeit den Logarithmen des Sinus, des Cosinus u. s. f. eines Winkels, der in Graden und Minuten gegeben ist, wenn man nur folgende Einrichtung der Tafeln kennet. Die Winkel stehen nach der Ordnung der Minuten, auf der einen Seite von oben herunter gezählt, und darneben die Sinus und Tangenten nebst ihren Logarithmen. Grade gegenüber auf der andern Seite, stehen die Winkel, welche die vorigen zu 90° ergänzen, nebst ihren Sinus und Tangenten, die also der vorigen Cosinus und Cotangenten sind. Dies hat die Einrichtung veranlast, daß auf dieser Seite die Minuten von unten hinauf gezählt sind. Die Grade sind deswegen allein auf einer Seite von 0° bis zu 45° bis am Ende der Tafeln fortgezählet, und nun auf der andern Seite wieder rückwärts von 45° bis zu 90°.

Will man die Winkel genauer, als auf Minuten in Rechnung bringen: so dienen dazu folgende zwo Aufgaben.

437 §.

Durch Hülfe der gemeinen Tafeln den Logarithmen einer trigonometrischen Linie zu finden, die zu einem Winkel gehört, der ausser Graden und Minuten noch Secunden enthält.

Aufl. Man nimt auch hier eine ähnliche Voraussetzung wie im 154 § der allgemeinen Rechenkunst an, die so weit richtig ist, daß sie bey den gewöhnlichsten Rechnungen keinen sehr merklichen Fehler giebt. Man nimt an, daß die Differenzen dieser Logarithmen den Differenzen der Winkel proportional seyn, dafern diese Differenz der Winkel nicht über eine Minute beträgt. Diese Voraussetzung ist freylich bey kleinen Winkeln ziemlich unrichtig, aber der Fehler wird immer geringer, je größer die Winkel werden, und nimt, was die Logarithmen der Sinus betrift, immer mehr ab, je größer die Winkel werden. Was die Logarithmen der Tangenten betrift: so nimt der Fehler zwar wieder ziemlich zu, wenn die Winkel nicht vielmehr von 90° unterschieden sind; inzwischen kan man doch in den meisten Fällen der Ausübung diese Voraussetzung beybehalten, wenn man eben nicht die gröste Schärfe sucht.

Da man nun die Logarithmen dieser Linien für alle einzelne Minuten des Quadranten hat: so nimt man die Differenz zwischen den beyden Logarithmen für die verlangte trigonometrische Linie des nechst größern, und nechst kleinern Winkels, und schliest: wie 60″

zur gegebenen Anzahl Secunden, so die gefundene Differenz zur vierten Zahl, die man zum nechst kleinern Logarithmo addiren muß, wenn die trigonometrische Linie mit dem Winkel wächst, wie der Sinus, die Tangente und Secante unter 90°. Wenn aber diese Linie abnimt, indem der Winkel wächst, wie der Cosinus, die Cotangente und Cosecante: so muß man die gefundene vierte Zahl vom nechstgrößern Logarithmo subtrahiren.

Exempel.

Man suche den *log* sin 53° 28′ 54″: so ist

l sin 53° 29′ = 9.9050852
l sin 53° 28 = 9.9049916

Differenz = = = 936

Also schliest man

60″ : 54″ = 936 : 842;
und weil *l* sin 53° 28′ = 9,9049916
die vierte Zahl wegen 54″ = + 842

so ist *l* sin 53° 28′ 54″ = 9.9050758

Eben so findet man den Logarithmen der Tangente dieses Winkels.

Es ist *l* tang 53° 29′ = 10, 1303269
l tang 53° 28′ = 10, 1302628

Differenz = = 2641

Also 60″ : 54″ = 2641 : 2377,
und weil *l* tang 53° 28′ = 10, 1302628
wegen der 54″ — + 2377

so ist *l* tang 53° 28′ 54″ = 10, 1305005

Den Logarithmen des Cosinus und der Cotangente dieses Winkels findet man auf ähnliche Art.

Es

Es ist l col 53° 28′ = 9,7747288
l col 53° 29′ = 9.7745583

Differenz 1705

Aber 60″ : 54″ = 1705 : 1534, und weil:
l col 53° 28′ = 9.7747288
wegen der 54″ — 1534

so ist l col 53° 28′ 45″ = 9,7745754

Ferner ist l cot 53° 28′ = 9,8697372
l cot 53° 29′ = 9,8694731

Differenz 2641

Aber 60″ : 54″ = 1641 : 2376. Weil also
l cot 53° 28′ = 9.8697372
wegen der 54″ — 2376

so ist l cot 53° 28′ 54″ = 9,8694996.

Die Differenzen der nach einander folgenden Logarithmen stehen in den Sherwinschen Tafeln allemahl dabey, daß man also nicht nöthig hat, sie zu suchen.

438 §.

Den Winkel zu finden, welcher einem solchen Logarithmo einer trigonometrischen Linie zugehört, der in den Tafeln selbst nicht vorkomt.

Aufl. Man darf nur die Vorschriften des vor. § umkehren. Man muß ein paar Logarithmen unter den Logarithmen der Sinus, oder Tangenten, u. s. f. aufsuchen, zwischen welchen der gegebene Logarithme, als zwischen zwoen Grenzen enthalten ist. Alsdenn nimt man die Differenz dieser beyden Grenzen sowohl, als auch des gegebenen Logarithmen, vom nechst kleinern, und schliest: die Differenz der

beyden

beyden Grenzen zur Differenz des gegebenen Logarithmen vom nechst kleinern, wie 60″ zur vierten Zahl. Dies giebt eine Anzahl von Secunden, die man zu dem Winkel addirt, der dem nechst kleinern Logarithmo zugehört, dafern die trigonometrische Linie mit dem Winkel wächst; im Gegentheil aber, von diesem Winkel abziehet.

Es sey der Logarithme des Sinus eines Winkels = 9, 9426938, man sucht den Winkel. Dieser Sinus fällt zwischen 61° 12′ und 61° 13′. Denn es ist

l sin 61° 13′ = 9.9427255
l sin 61° 12′ = 9.9426561

Differenz = 694

der gegebene Log. = 9.9426938
l sin 61° 12′ = 9.9426561

Differenz = 377.

Nun findet sich 694 : 377 = 60″ : 32″, also ist der gesuchte Winkel = 61° 12′ 32″.

Es sey der Log. der Tangente eines Winkels = 10, 1948376: so sind die Grenzen

l tang 57° 27′ = 10, 1949767
l tang 57° 26′ = 10, 1946981

Differenz = 2786

Der gegebene Log. = 10, 1948376
l tang 57° 26′ = 10, 1946981

Differenz = 1395

Man findet 2786 : 1395 = 60″ : 30″, also der gesuchte Winkel 57° 26′ 30″.

Es sey der Log. des Cosinus eines Winkels = 9.8807832: so sind die Grenzen

$l \cos 40° 32' = 9.8808296$
$l \cos 40° 33' = 9.8807215$

Differenz = = 1081

der gegebene Log. = 9.8807832
$l \cos 40° 33' = 9.8807215$

Differenz = = 617

Man findet 1081 : 617 = 60″ : 34, also ist der gesuchte Winkel = 40° 33′ − 34″ = 40° 32″ 26″.

Es sey der Logarithme der Cotangente eines Winkels = 9,7766384: so sind die Grenzen

$l \cot 59° 7' = 9{,}7767685$
$l \cot 59° 8' = 9{,}7764816$

Differenz = = 2869

der gegebene Log. = 9,7766384
$l \cot 59° 8' = 9{,}7764816$

Differenz = = 1568

Man findet 2869 : 1568 = 60″ : 32″. Also ist der gesuchte Winkel = 59° 8′ − 32″ = 59° 7′ 28″.

Der XVII. Abschnitt.

Berechnung der Seiten und Winkel gradlinichter Dreyecke, und regulärer Polygone.

439 §.

In rechtwinklichten Dreyeck *ABC* verhalten sich die Seiten gegen einander, wie die Sinus der gegen überstehenden Winkel. 189 F.

Und überdem ein Cathetus *AC* zum andern *AB*, wie der Halbmesser, oder Sinus totus zur Tangente des, dem zweeten Catheto *AB* gegen überstehenden Winkels *C*.

Beweis. Es sey aus C mit dem Halbmesser $CD = r$, wodurch man hier den Halbmesser der Tafeln verstehen kan, ein Kreis DE beschrieben, für diesen Halbmesser verzeichne man $EF = \sin C$, $DH = \text{tang } C$: so ist $CF = \cos C = \sin CEF = \sin B$. Aber es ist das Dreyeck ABC ∽ DHC ∽ FEC, also $BC : AB = CE : EF$, und $BC : AC = CE : CF$, folglich $BC : AB = r : \sin C$, und $BC : AC = r : \cos C$, oder $= r : \sin B$, wo $r = \sin A$ ist. Diese Proportionen kan man auch so setzen $BC : r = AB : \sin C$, und $BC : r = AC : \sin B$, also auch $AB : \sin C = AC : \sin B$.

Man hat ferner $AC : AB = CD : DH$, oder $AC : AB = r : \text{tang } C$. Weil nun $C = 90° - B$: so ist $\text{tang } C = \cot B$, und $AC : AB = r : \cot B$. Also auch $AB : AC = \cot B : r = r : \text{tang } B$ (418 §).

Es sey $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, der Winkel $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$, $r = 1$: so ist $a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\cos\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{\cos\beta}$, also $b = a\sin\beta = a\cos\gamma$, $c = a\sin\gamma = a\cos\beta$, und $\sin\beta = \frac{b}{a}$, $\sin\gamma = \frac{c}{a}$. Weil nun $\frac{1}{\sin\beta} = \operatorname{cosec}\beta$, und $\frac{1}{\cos\beta} = \sec\beta$: so ist auch $a = b\operatorname{cosec}\beta = b\sec\gamma = c\sec\beta = c\operatorname{cosec}\gamma$.

Ferner ist $\operatorname{tang}\gamma = \frac{c}{b} = \cot\beta$, $\cot\gamma = \frac{b}{c} = \operatorname{tang}\beta$, also $c = b\operatorname{tang}\gamma = b\cot\beta$, und $b = c\operatorname{tang}\beta = c\cot\gamma$.

440 §.

181 F. In jedem Dreyeck verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegen über stehenden Winkel, die zu einerley Halbmesser gehören.

Beweis. Wenn AB und BC zwo Seiten eines Dreyecks ABC sind: so lasse man aus der Spitze des Winkels B, den sie einschliessen, auf die entgegengesetzte Seite AC die senkrechte Linie BD fallen; da es denn gleichviel ist, ob sie innerhalb, oder ausserhalb des Dreyecks fällt. Nun hat man in den rechtwinklichten Dreyecken ABD, BCD (439 §) die Proportionen $AB : BD = r : \sin A$, und $BC : BD = r : \sin C$, und durch A kan man in der 183 Fig. sowohl BAC, als auch BAD verstehen (403 §). Dies

giebt

giebt $AB \times \sin A = BD \times r = BC \sin C$, also auch $AB : BC = \sin C : \sin A$, oder $AB : \sin C = BC : \sin A$.

Es sey wiederum $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ der Winkel $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$: so ist $\sin\alpha = \frac{a \sin\beta}{b} = \frac{a \sin\gamma}{c}$, $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} = \frac{b \sin\gamma}{c}$, $\sin\gamma = \frac{c \sin\alpha}{a} = \frac{c \sin\beta}{b}$. Also auch $a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$, $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$.

441 §.

Im Dreyeck ABC sind zweene Winkel A und B, nebst einer Seite AB in Zahlen gegeben, man soll die übrigen beyden Seiten BC und AC durch Rechnung finden. 181 F.

Aufl. Wenn zweene Winkel A und B bekant sind: so kennet man allemahl zugleich die Grösse des dritten Winkels C (274 §). Also weis man die Grösse einer Seite AB und des gegenüber stehenden Winkels C. Ueberdem sind die andern beyden Winkel A und B auch bekant, deswegen hat man nach der Regel des 439 und 440 § allemahl eine Proportion zwischen der bekanten Seite, dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels, der gesuchten Seite, und dem Sinus des gegenüber stehenden Winkels, die man so ordnen kan, daß die gesuchte Seite das vierte Glied wird, welches man nach dem 175 § der Rechenk. findet. So hat man im gegenwärtigen

Fall

Fall $\sin C : AB = \sin A : BC$, und $\sin C : AB = \sin B : AC$. Man rechnet stat der Zahlen selbst lieber mit ihren Logarithmen, weil hiedurch die Arbeit verkürzt wird.

Es sey $A = 29° 38' 24''$ $B = 109° 54' 16''$ und $AB = 78324,3$ Ruth. Man suche also zuförderst C, und man findet

$A = 29° 38' 24''$ $\quad A+B+C = 179° 59' 60''$
$B = 109° 54' 16''$ $\quad A+B = 139° 32' 40''$

$A+B = 139° 32' 40''$ $\quad$ Also $C = 40° 27' 20''$

Nun setze man an

$\sin 40° 27' 20'' : 78324,3 R = \sin 29° 38' 24'' : BC$

und die Rechnung giebt

$l\,78324,3 = 4,8938965$
$l \sin 29° 38' 24 = 9,6942091$

14.5881056

$l \sin 40° 27' 20'' = 9.8121497$

$l\,BC = 4,7759559$

Also $BC = 59697,47$ R.

Man setze ferner

$\sin 40° 27' 20'' : 78324,3 R = \sin 109° 54' 16'' : AC$

oder $\sin 40° 27' 20'' : 78324,3 R = \sin 70° 5' 44'' : AC$, weil $\sin 109° 54' 16'' = \sin (180° - 109° 54' 16'')$ (403 §), so giebt die Rechnung

$l\,78324,3 = 4,8938965$
$l \sin 70° 5' 44'' = 9,9732488$

$14,8671453$

$l \sin 40° 27' 20'' = 9,8121497$

$l\,AC = 5,0549956$

Also $AC = 113499,913$ R.

Weil

Weil diese Proportionen allgemein sind: so kan man sie allemahl gebrauchen, auch wenn einer von den gegebenen Winkeln $= 90°$ ist, da denn der Sinus dieses Winkels dem Halbmesser gleich, und sein Logarithme $= 10$ wird. Wenn $A = 90°$ ist, und die Hypothenuse BC ist nebst den übrigen Winkeln gegeben: so hat man 189 F.

$$\text{sin tot} : BC = \text{sin}B : AC$$
$$\text{sin tot} : BC = \text{cos}B : AB$$

Dafern ein Cathetus AB gegeben ist: so kan man den andern AC zu finden die Proportion gebrauchen

$$\text{sin tot} : \text{tang}B = AB : AC \quad (489\ §).$$

Und falls man Tafeln zur Hand hat, welche die Secanten mit ihren Logarithmen enthalten: so ergiebt sich die Hypothenuse aus der Proportion

$$\text{sin tot} : \text{sec}B = AB : BC \quad (439\ §).$$

Es sey $AB = 54837{,}2$ Ruth. und $B = 65°28'17''$: so findet man

$l\,\text{tg}.65°28' = 10{,}3406267$	$l\,\text{sec}65°28' = 10{,}3817191$
$17'' \quad 948$	$17'' \quad 784$
$l\,AB = 4{,}7930753$	$l\,AB = 4{,}7930753$
$l\,AC = x\,5{,}1337968$	$l\,BC = x\,5{,}1748728$
Also $AC = 136080{,}8$	Also $BC = 149579{,}8$.

442 §.

Wenn der Halbmesser *AC* eines Kreises gegeben ist, und die Anzahl der Seiten des in, oder um den Kreis beschriebenen Polygons, die Polygonseite *AE* oder *PQ* zu finden. 191 F.

Auch umgekehrt: Wenn die Polygonseite *AE*, nebst der Anzahl der Seiten gegeben ist, den

Halb-

Halbmesser des um, oder in demselben zu beschreibenden Kreises *CA* oder *CM* zu finden.

Aufl. Man berechne den Polygonwinkel LAE $= \varphi$ nach dem 275 §. Der Halbmesser CA sey $= r$: so erhält man $BQ = r \cot AEC = r \cot \frac{1}{2}\varphi$ (439. 441 §). Also $PQ = 2r \cot \frac{1}{2}\varphi$. Ferner wird $EM = r \cos \frac{1}{2}\varphi$, und $AE = 2r \cos \frac{1}{2}\varphi$ (440. 441 §).

Demnach ist umgekehrt $r = \frac{\frac{1}{2}AE}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2}AE.$ $\sec \frac{1}{2}\varphi$, und $CM = \frac{1}{2}AE \tan \frac{1}{2}\varphi = \frac{\frac{1}{2}AE}{\cot \frac{1}{2}\varphi}$.

Für das Siebeneck ist $\varphi = 128° 34' 17\frac{1}{7}''$, also $\frac{1}{2}\varphi = 64° 17' 8\frac{4}{7}''$. Es sey $r = 3420$ R: so giebt die Rechnung für die Seite des Siebenecks um den Kreis

$l2 = 0,3010300$
$lr = 3,5340261$
$l\cot \frac{1}{2}\varphi = 9,6826667$
$x3,5177228$

Also die Seite des Siebenecks um den Kreis
$= 3293,995$ Ruthen.

Ferner für das Siebeneck im Kreise

$l2r = 3,8350561$
$l\cos \frac{1}{2}\varphi = 9,6373798$
$x3,4724359$

Also die Seite des Siebenecks im Kreise
$= 2967,809$ Ruthen.

Wäre umgekehrt die Seite des Siebenecks $a = 1000$ Ruth: so erhielte man für des umschriebenen Kreises Halbmesser

$l\frac{r}{2}$

$l\frac{1}{2}a + l\sin\text{tot.} = 12,6989700$
$-l\cos\frac{1}{2}\varphi = 9,6373798$
$3,0615902$

Also der gesuchte Halbmesser $= 1152,365$.

Für den Halbmesser des Kreises im Siebeneck giebt die Rechnung

$l\frac{1}{2}a + l\sin.\text{tot.} = 12,6989700$
$l\cot\frac{1}{2}\varphi = 9,6826667$
$3,0163033$

Also der Halbmesser $= 1038,253$ Ruth.

443 §.

Wenn die Anzahl der Grade eines Kreisbogens *ABE* nebst dem zugehörigen Halbmesser *CA* gegeben ist, die Sehne *AE* dieses Bogens zu finden. 191 F.

Auch umgekehrt: Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreisbogens, und seiner Sehne, die Anzahl seiner Grade zu finden.

Aufl. Wenn AB des Bogens ABE Hälfte ist: so ist die Sehne AE des Bogens ABE der doppelte Sinus AM seiner Hälfte AB (398 §). Wenn also die Anzahl der Grade des Bogens ABE $= \psi$ ist: so giebt die Proportion

$$\sin.\text{tot} : 2\sin\tfrac{1}{2}\psi = AC : AE.$$

die verlangte Sehne.

Demnach findet man vermittelst der umgekehrten Proportion $AC : AE = \sin.\text{tot} : 2\sin\frac{1}{2}\psi$ aus der gegebenen Sehne den doppelten Sinus eines Bogens, der halb so viel Grade hält, dessen Hälfte man in den

Tafeln

Tafeln nachschlagen kan, da dann die zugehörige Zahl von Graden doppelt genommen, die gesuchte ist.

Wenn man also die Sehne eines Bogens für den Halbmesser der Tafeln haben will: so darf man nur den Sinus des halben Bogens aus den Tafeln doppelt nehmen. Nimt man einen Halbmesser, der halb so groß ist, als der Halbmesser der Tafeln: so ist die Sehne des Bogens, der eine gegebene Anzahl Grade hält, so groß, als der Sinus der Tafeln für einen Bogen von eben so viel Graden.

Hierauf gründen sich die Methoden, die Winkel vermittelst ihrer Sehnen zu messen, oder zu zeichnen, welche von den practischen Schriftstellern ausführlich pflegen beschrieben zu werden.

444 §.

191 F. Wenn der Halbmesser r eines Kreises gegeben ist, die Seite des regulären Zehnecks in diesem Kreise zu finden, ohne vorher nach dem 442 § den Polygonwinkel zu berechnen.

Aufl. Es sey AB die gesuchte Seite des Zehnecks, AB sey bis D verlängert, $BD = BC = r$ gemacht, und CD gezogen: so ist $ABC = 2BCD$. Nun ist ferner $ACB = \frac{4R}{10} = \frac{2}{5}R$, und $ABC = R - \frac{1}{5}R = \frac{4}{5}R$, folglich $ABC = 2ACB$, und $ACB = BCD = ADC$. Demnach ist das Dreyeck ADC $\sim$ ACB (210 §), und $AD:AC = AC:AB$, d. i. $AB+r:r = r:AB$. Es sey nun $AB = x$: so hat man die Gleichung $xx+rx = rr$, und diese giebt nach dem 197 §. A. R. $x = -\frac{1}{2}r \pm r\frac{5}{4}r^2$.

Die

Die Ursache, warum hier zweene Werthe gefunden werden, ist diese. Man sucht, wie groß das Stück BA genommen werden müssen, welches zu BD addirt, zur Summe, und der gegebenen DB die dritte Proportionallinie ist. Diese kan, wie die Proportion unmittelbar zeiget, so gut positiv, als negativ seyn. Aber man sucht hier das positive Stück BA, und dies wird $= r\frac{5}{4}r^2 - \frac{1}{2}r = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}r$

$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$

Man setze demnach CF auf AC senkrecht, und nehme $CG = \frac{1}{2}r$: so wird $GF = r(rr + \frac{1}{4}rr) = r\frac{5}{4}rr$. Man nehme ferner $GH = GF$: so ist $CH = GH - GC = r\frac{5}{4}rr - \frac{1}{2}r =$ der gesuchten Seite AB des regulären Zehnecks.

Weil $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = r\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = r\frac{6-2\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{2}}$; so ist auch $AB = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{2}r,$

und weil $AB = 2r \sin \frac{1}{2}ACB = 2r \sin 18°$; so wird

$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}.$

445 §.

Die Gleichung des vor. §. $xx + rx = rr$ giebt auch $xx = rr - rx$, oder $xx = r(r-x)$. Da nun $CK = r$, $HK = r - x$, weil $x = AB = CH$; so ist $CH^2 = CK.HK$, und der Halbmesser CK ist bey H so getheilt, daß das Quadrat des grösten Stücks

dem Rectangel aus dem kleinern in die ganze Linie gleich ist. Die alten Geometer nanten dies: eine Linie *media et extrema ratione* theilen. Man theilt also eine Linie media et extrema ratione auf eben die Art, wie man zum gegebenen Halbmesser die Seite des Zehnecks sucht, wenn man nämlich die gegebene Linie für den Halbmesser des Kreises nimt.

446 §.

191 F. Wenn die Seite *AB* eines regulären Polygons im Kreise gegeben ist, die Seite *AE* eines andern zu finden, das doppelt so viel Seiten hat.

Aufl. Es sey $ACB = \alpha$: so ist $AB = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha$ und $AE = 2r \sin \alpha$. Da nun $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha . \cos \frac{1}{2}\alpha$; so ist $AE = 2r . 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha = 2AB \cos \frac{1}{2}\alpha$.

Aber $\cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{r\sqrt{(1-\sin \frac{1}{2}\alpha^2)}}{r} = \frac{\sqrt{(rr-rr\sin \frac{1}{2}\alpha^2)}}{r}$,

also wird $AE = \frac{2AB\sqrt{(rr-rr\sin \frac{1}{2}\alpha^2)}}{r^2} =$

$\frac{2AB\sqrt{(rr-\frac{1}{4}AB^2)}}{r}$, weil $4rr \sin \frac{1}{2}\alpha^2 = AB^2$,

oder auch $AE = \frac{AB\sqrt{(4rr-AB^2)}}{r}$.

447 §.

Wenn die Seite des Zehnecks bekant ist, die Seite des Fünfecks zu finden.

Aufl. Wenn AB die Seite des Zehnecks ist: so hat man $\alpha = 36°$; $2 \sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (444 §).

Also

Also $4\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}$, $16\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 6-2\sqrt{5}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$.

Demnach wird $16\sin\frac{1}{2}\alpha^2.\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{16} = \frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{4}$

$\frac{10-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Folglich ist die Seite des Fünfecks $AE = rr\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Es ist also auch $AE = rr\frac{10-2\sqrt{5}}{4}$

$rr\frac{4+5-2\sqrt{5}+1}{4} = rr\left(1+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right)$

$= r\left(rr+\frac{rr(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right) = r(rr+AB^2)$

(444§). Man ziehe demnach in der 191 F. HF: so ist $HF = r(rr+CH^2) = r(rr+AB^2)$ (444§) = der gesuchten Seite AE des Fünfecks.

448 §.

Im Dreyeck *ABC* ist ein Winkel *A* gegeben, nebst zwoen Seiten *AB*, *BC*, die den Winkel nicht einschliessen: man soll die übrigen Winkel *B* und *C* nebst der dritten Seite *AC* finden. 191 F.

Aufl. Weil die Seiten den gegebenen Winkel A nicht einschliessen: so wird eine, BC, demselben gegenüber stehen. Man hat also nach dem 439 und 440 § eine Proportion zwischen dieser Seite BC, dem gegenüber stehenden Winkel A, der andern bekan-

ten Seite AB, und dem ihr gegenüber stehenden Winkel C, die man so ordnet, daß der Sinus des Winkels C als des unbekanten das letzte Glied wird. Man schliest nemlich BC: sin A = AB: sin C. Der Sinus, welchen man für den Winkel C herausbringt, gehört für zweyerley Winkel, falls es nicht der ganze Sinus, oder der Halbmesser selbst ist (403 §). Also könnte C sowohl stumpf, als spitz seyn. Aber die Lehren des 75 § ergeben die Umstände, unter welchen diese Ungewißheit wegfällt. Wenn A stumpf, oder ein rechter Winkel ist: so weis man, daß C nothwendig spitz seyn müsse. Wenn A spitz, und BC > AB ist: so ist ebenfalls C nothwendig ein spitzer Winkel. Denn wollte man C stumpf nehmen: so wäre AB > BC, gegen die Voraussetzung. Also bleibt die Sache nur zweifelhaft, wenn A spitz und BC < AB ist, welches mit dem 79 § übereinstimt. In diesem Falle also müssen andre Umstände zeigen, ob C stumpf oder spitz zu nehmen sey, und man weis in der Ausübung gemeiniglich die Größe der gesuchten Winkel schon einigermaaßen zum voraus, so, daß der Zweifel mehrentheils wegfällt.

Hat man nun C: so ist auch B bekant (274 §), und man sucht AC nach dem 441 § aus der Proportion sin A : BC = sin B : AC. Es sey AB = 64875,74 R, BC = 45613,96 R, A = 26° 19′ 36″: so setze man an 45613,96 R : sin 26° 19′ 36″ = 64875,74 R : sin C und die Rechnung giebt

$$\begin{aligned} l \sin 26^\circ\, 19'' 36'' &= 9{,}6468822 \\ l\, 64875{,}74 &= 4{,}8120823 \\ \hline & 14{,}4589645 \\ l\, 45613{,}76 &= 4{,}6590976 \\ \hline l \sin C &= 9{,}7998669 \end{aligned}$$

Also

Also ist C = 39° 6′ 32″, dafern C spitz ist, widrigenfalls ist C = 140° 53′ 28″. Demnach wird im ersten Fall B = 114° 34′ 1″, im zweeten Fall aber B = 12° 46′ 56″. Hiernach richtet sich also die fernere Rechnung, wenn man AC aus der Proportion sin A : BC = sin B : AC sucht.

Es sey nun A = 36° 52′ 11$\frac{2}{3}$″, AB = 10000 R, BC = 6000 R, man sucht C: so giebt die Rechnung

6000 : sin 36° 52′ 11$\frac{2}{3}$″ = 10000 : sin C

l 10000 = 4,0000000

l sin 36° 52′ 11$\frac{2}{3}$″ = 9,7781513

13.7781513

l 6000 = 3,7781513

l sin C = 10.0000000

Also ist C = 90°, und B = 53° 7′ 48$\frac{1}{3}$″.

449 §.

Aus der Summe und Differenz zweer Grössen die Grössen selbst zu finden.

Aufl. Die halbe Differenz zur halben Summe addirt giebt die grössere, und die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt, giebt die kleinere von den gesuchten Grössen. Denn es ist $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) = a$, und $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b$.

450 §.

Die Summe der Sinus zweener Winkel verhält sich zur Differenz ihrer Sinus, wie die Tangente der halben Summe dieser Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Beweis. Es war im 423 §

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Also ist I) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

und II) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

Man setze nun $\alpha+\beta = \eta$, $\alpha-\beta = \vartheta$: so ist $\alpha = \frac{1}{2}(\eta+\vartheta)$, und $\beta = \frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$ (449 §). Dies setze man in die Gleichungen I und II: so wird

I) $\sin\eta+\sin\vartheta = 2\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

II) $\sin\eta-\sin\vartheta = 2\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$.

Demnach ist $\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)} \times \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$ oder $\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta} = \tang\frac{1}{2}(\eta+\vartheta) \times \frac{1}{\tang\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$ (417 §) $= \frac{\tang\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\tang\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$, und dies giebt die Proportion

$$\sin\eta+\sin\vartheta : \sin\eta-\sin\vartheta = \tang\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta) : \tang\tfrac{1}{2}(\eta-\vartheta).$$

451 §.

Die im Beweise des vor. § gebrauchten Gleichungen

I) $\sin\eta+\sin\vartheta = 2\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)$

II) $\sin\eta-\sin\vartheta = 2\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

sind auch in andrer Absicht merkwürdig. Man kan die Summe und Differenz der Cosinus zweener Win-

kel

kel auf ähnliche Art ausdrücken. Man hat nemlich

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Also wird

III) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

IV) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$

Ist nun wie vorhin, $\alpha+\beta=\eta$, und $\alpha-\beta=\vartheta$: so erhält man

III) $\cos\vartheta+\cos\eta = 2\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

IV) $\cos\vartheta-\cos\eta = 2\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

Dies giebt die Folgen

$$\frac{\cos\vartheta+\cos\eta}{\cos\vartheta-\cos\eta} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cot\tfrac{1}{2}(\eta-\vartheta)$$

und

$$\frac{\cos\vartheta-\cos\eta}{\cos\vartheta+\cos\eta} = \tang\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta)\tang\tfrac{1}{2}(\eta-\vartheta).$$

Wenn man mit den beyden Gleichungen III und IV die beyden ersten I. II verbindet: so erhält man noch folgende

$$\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\cos\vartheta+\cos\eta} = \tang\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta)$$

$$\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\cos\vartheta-\cos\eta} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta-\vartheta)$$

$$\frac{\sin\eta-\sin\vartheta}{\cos\vartheta+\cos\eta} = \tang\tfrac{1}{2}(\eta-\vartheta)$$

$$\frac{\sin\eta-\sin\vartheta}{\cos\vartheta-\cos\eta} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta).$$

Also

Also ist

$$\frac{\cos\vartheta-\cos\eta}{\sin\eta-\sin\vartheta}=\tang\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta)=\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\cos\vartheta+\cos\eta}.$$

Ueberdem wird auch

$$\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta}\times\frac{\cos\vartheta+\cos\eta}{\cos\vartheta-\cos\eta}=\left(\cot\tfrac{1}{2}(\eta-\vartheta)\right)^2$$

$$\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta}\times\frac{\cos\vartheta-\cos\eta}{\cos\vartheta+\cos\eta}=\left(\tang\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta)\right)^2$$

452 §.

181 F. In jedem Dreyeck ABC verhält sich die Summe zwoer Seiten $AC+AB$ zu ihrer Differenz $AC-AB$, wie die Tangente der halben Summe der beyden gegenüberstehenden Winkel B und C zur Tangente ihrer halben Differenz.

Beweis. Es ist $AC:\sin B=C$ (440 §), also $AC+AB:AC-AB=\sin B+\sin C:\sin B-\sin C$ (180. 182 §), folglich auch $AC+AB:AC-AB=\tang\frac{1}{2}(B+C):\tang\frac{1}{2}(B-C)$ (450 §).

453 §.

Im Dreyeck ABC sind zwo Seiten AB, AC nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, man soll die übrigen beyden Winkel B und C nebst der dritten Seite BC finden.

1 Fall. Wenn $A=90°$ ist, so schliesse man

189 F. $AB:AC=\text{sin. tot}:\tang B$ (439 §).

Hieraus ergiebt sich B, und es wird $C=90°-B$. Die Grösse der Hypothenuse BC kan man nun nach der Proportion $\sin B:AC=\text{sin. tot}:BC$ suchen. Oder

man

man kan auch aus dem 283 §, ohne vorher die Winkel zu kennen, zuerst die Hypothenuse BC, und sodann aus der Proportion BC : sin. tot = AC : sinB die Winkel B und C = 90° — B finden.

Es sey A = 90°, AB = 5419 R. AC = 7364,7 R. so ist 5419 : 7364,7 = sin. tot : tang. B und die Rechnung giebt

l 7364,7 + l sin. tot = 13, 8671551
l 5419 = 3, 7339192

l tang B = 10, 1232359
l tang 53° 1′ = 10, 1231485

Differenz - - - 874

2629 : 874 = 60″ : 20″ beynahe.

also B = 53° 1′ 20″
C = 36° 58′ 40″.

Wenn man die Winkel braucht: so ist diese Rechnung kürzer, als wenn man zuerst nach dem 283 § die Hypothenuse suchte, und dann nach dem 441 § die Winkel berechnete.

II Fall. Wenn A nicht = 90° ist: so subtra- 181
hire man A von 180°. Dies giebt die Summe F. der übrigen Winkel B + C (274 §). Also kan man schliessen AC + AB : AC — AB = tang ½ (B + C) : tang ½ (B — C) (452 §). Dies giebt die halbe Differenz der gesuchten Winkel. Diese zur halben Summe addirt giebt den grössern, und von der halben Summe subtrahirt, den kleinern Winkel (449 §) dann aber hat man die dritte Seite nach dem 441 §.

Es sey A = 29° 38′ 24″, AC = 113499,913 R AB = 78324,3 R: so giebt die Rechnung B + C = 150° 21′ 36″, und ½ (B + C) = 75° 10′ 48″. Ferner

AC = 113499,913 R lAC − AB = 4,5462416
AB = 78324,3 $l$tg. $\frac{1}{2}$(B+C) = 10,5774351

AC+AB = 191824,213 R 15,1236767
AC−AB = 35175,613 R lAC+AB = 5,2829035
$l$tg. $\frac{1}{2}$(B−C) = 9.8407732

Also $\frac{1}{2}$(B−C) = 34° 43′ 28″, B = 109° 54′ 16″ und C = 40° 27′ 20.

Eine andere Auflösung.

Bey astronomischen Rechnungen komt oft der Fall vor, daß die beyden Seiten AC und AB nicht selbst; sondern ihre Logarithmen gegeben sind, wenn man die Winkel B und C sucht. Sodann ist es vortheilhafter nach folgenden Regeln zu verfahren. Man schliest

Die kleinere Seite *AB* zur grösern *AC*, wie der ganze Sinus zur Tangente eines Winkels α.

Ferner der ganze Sinus zur *tang* (α − 45°), wie *tang* $\frac{1}{2}$(*B*+*C*) : *tang* $\frac{1}{2}$(*B*−*C*), woraus man, wie vorhin B und C findet.

Bleiben also die vorigen Zahlen, so giebt die Rechnung

lAC + $l$sin tot = 15,0549956
lAB = 4,8938965
$l$tang α = 10,1610991
also α = 55° 23′ 28″
und α − 45° = 10° 23′ 28″

Dies giebt ferner

$l$tang (α − 45°) = 9,2633382
$l$tang $\frac{1}{2}$(B+C) − $l$sin. tot = 0,5774351
$l$tang $\frac{1}{2}$(B−C) = 9,8407733

welches B und C so wie vorhin giebt.

Beweis.

Beweis. Auf der grösten gegebenen Seite AC nehme man AD = der kleinsten AB, verlängere AC, nehme DE = AD = AB, und DF = AC: so ist AF = DF + AD = AC + AB, und EF = DF − DE = AC − AB. Man mache den Winkel CAG = 45°, und setze EG, FH auf AH senkrecht: so wird auch AEG = AFH = 45° = AGD = DGE, und AG GE, AH = HF, AD = DG = AB. Nun ist DG: DF = sin tot: tang DGF, oder AB: AC = sin. tot: tang α, wenn DGF = α gesetzt wird. Es ist ferner EGF = DGF − DGE = α − 45° = GFH, und FH: HG = sin. tot: tang (α − 45°) = AH: HG = AF: FE = AC + AB: AC − AB = tang $\frac{1}{2}$ (B + C): tang $\frac{1}{2}$ (B − C).

Dritte Auflösung.

Im Dreyeck ABC sey BD auf AC senkrecht gesetzt. 181
Wenn nun BAC = α, BC = a, AC = b, AB = c F.
gesetzt wird; so ist $AD = \frac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b} = \frac{bb+cc-aa}{2b}$ (175 §. A. R.) und $AD = c \cos\alpha$ (439 §) also wird $c.\cos\alpha = \frac{bb+cc-aa}{2b}$ und $a = r(bb - 2bc.\cos\alpha + cc)$, woraus sich die Seite BC = a ergiebt, ohne daß es nöthig ist, die Winkel ABC und C vorher zu berechnen. Man setze ABC = β und C = γ: so wird $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$ (440 §) also $\cos\beta = r\left(1 - \frac{bb \sin\alpha^2}{bb - 2bc\cos\alpha + cc}\right)$ (416 §) =

$= \frac{c - b\cos\alpha}{\sqrt{(bb - 2bc + cc)}}$ und $\tan\beta = \frac{b \sin\alpha}{c - b\cos\alpha}$.
(417 §)

454 §.

181 F. Im Dreyeck *ABC* sind die drey Seiten *BC* $= a$, *AC* $= b$, *AB* $= c$ gegeben, man soll die Winkel finden.

I. Aufl. Wenn BD auf AC senkrecht ist, und überdem AB = BC; so wird AD $= \frac{1}{2}$AC (61 §), und man kan im rechtwinklichten Dreyeck ABD den Winkel A oder auch ABD nach dem 448 § berechnen, woraus man die übrigen gesuchten Winkel nach dem 274 § findet. Dafern aber das Dreyeck ABC ungleichseitig ist, so hat man $AD = \frac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$

(175 § A. R.) $= \frac{1}{2}AC + \frac{(AB+BC)(AB-BC)}{2AC}$

und $\cos A = \frac{AD \times \textit{sin tot}}{AB}$ (439 §). Man kan also zuerst AD, und hiernächst A berechnen, da sich dann ferner C und ABC aus dem 441 § ergeben.

Es sey AC = 113499,913 R., BC = 78324,3 R. AB = 59697,47 R: so giebt die Rechnung.

$BC = 78324,3 = a$
$AB = 59697,47 = c$
$BC+AB = 138021,77 = a+c$
$BC-AB = 18626,83 = a-c$
$l(a+c) = 5,1399476$
$l(a-c) = 4,2701389$
$9,4100865$
$lb = 5,0549956$
$l\frac{(a+c)(a-c)}{b} = 4,3550909$
$l2 = 0,3010300$
$l\frac{(a+c)(a-c)}{2b} = 4,0540609 = lED$

Also $ED = 11325,594$
$\frac{1}{2}AC = 56749,956$
und $AD = 45424,362$

Ferner $lAD + l\sin.t. = 14,6572889$
$lAB = 4,7759559$
$l\cos A = 9,8813330$

Also $A = 40^\circ\ 28' - 40'' = 40^\circ\ 27'\ 20''$.

Daraus ergeben sich die übrigen Winkel, wie im 441 §.

II. Auflösung.

Die Gleichung $c.\cos\alpha = \frac{bb+cc-aa}{2b}$ (453 § III Aufl.) giebt auch $\cos\alpha = \frac{bb+cc-aa}{2bc}$. Weil nun $\sin\alpha = r(1-\cos\alpha^2) = r(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha$:

so

so setze man den vorigen Werth statt $\cos\alpha$, und es wird $1+\cos\alpha = \frac{(b+c)^2-aa}{2bc}$, $1-\cos\alpha = \frac{aa-(b-c)^2}{2bc}$, also $\sin\alpha = r\left(\frac{(b+c)^2-aa)(aa-(b-c)^2}{2bc}\right)$. Weil aber $(b+c)^2-aa = (b+c+a)(b+c-a)$ und $aa-(b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$ so wird $\sin\alpha = r\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2bc}$. Das vorige Exempel liesse sich also auch so berechnen.

$a = 78324,3$	$l(a+b+c) = 5,400\,57538$
$b = 113499,913$	$l(a+b-c) = 5,12099074$
$a+b = 191824,213$	$l(a+c-b) = 4,38955340$
$c = 59697,47$	$l(b+c-a) = 4,97714297$
$a+b+c = 251521,683$	$19,88826\,25$
$a+b-c = 132126,743$	$2)\ 9,94413\,12$
$a+c = 138021,77$	$+l\sin.t = 10,$
$a+c-b = 24521,857$	$l\,2bc = 10,13198\,15$
$b+c = 173197,383$	$l\sin\alpha = 9,81214\,97$
$b+c-a = 94873,083$	$\alpha = 40^\circ\ 27'\ 20''.$

Diese Formul ist für die Rechnung mit den Logarithmen am bequemsten. Sonst kan man auch eine der beyden vorigen $\cos\alpha = \frac{bb+cc-aa}{2bc}$, oder $1-\cos\alpha = \text{fv}\alpha = \frac{aa-(b-c)}{2bc}$ brauchen.

Der

Der XVIII. Abschnitt.

Vergleichung der Tangenten und Cotangenten einfacher und doppelter Winkel.

455 §.

Wenn die Tangenten zweener Winkel α und β gegeben sind, die Tangente und Cotangente ihrer Summe $\alpha+\beta$, und Differenz $\alpha-\beta$ zu finden.

Aufl. Es ist $\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$(417\,\S) = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ (423 §). Man dividire Zehler und Nenner dieses Bruchs mit $\cos\alpha\cos\beta$, so wird

$$\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}.$$

Also $\cot(\alpha+\beta) = \frac{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}$ (418 §).

Ferner $\text{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta}{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}$, und

$\cot(\alpha-\beta) = \frac{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta}$ (413 §).

Wenn $\alpha = 45°$ ist; so wird

$$\text{tang}(45° + \beta) = \frac{1 + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\beta} = \frac{\text{cos}\,\beta + \text{sin}\,\beta}{\text{cos}\,\beta - \text{sin}\,\beta}$$

$$\text{tang}(45° - \beta) = \frac{1 - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\beta} = \frac{\text{cos}\,\beta - \text{sin}\,\beta}{\text{cos}\,\beta + \text{sin}\,\beta}$$

Ueberdem auch

$$\text{cot}(45° + \beta) = \frac{1 - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\beta} = \frac{\text{cos}\,\beta - \text{sin}\,\beta}{\text{cos}\,\beta + \text{sin}\,\beta},$$

$$\text{cot}(45° - \beta) = \frac{1 + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\beta} = \frac{\text{cos}\,\beta + \text{sin}\,\beta}{\text{cos}\,\beta - \text{sin}\,\beta}.$$

456 §.

Aus der gegebenen Tangente eines Winkels die Tangente und Cotangente, nebst dem Sinus und Cosinus des doppelten Winkels zu finden.

Aufl. Wenn man $\alpha = \beta$ setzt, so erhält man $\text{tang}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}\,\alpha^2}$ und $\text{cot}\,2\alpha = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha^2}{2\,\text{tang}\,\alpha}$ (455 §). Ferner wird $\text{sec}\,2\alpha = r(1 + \text{tang}\,2\alpha^2) = \frac{1 + \text{tang}\,\alpha^2}{1 - \text{tang}\,\alpha^2}$ und $\text{cosec}\,2\alpha = r(1 + \text{cot}\,2\alpha^2) = \frac{1 + \text{tang}\,\alpha^2}{2\,\text{tang}\,\alpha}$ (419 §); also

$$\text{cos}\,2\alpha = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha^2}{1 + \text{tang}\,\alpha^2}, \text{ und } \text{sin}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha^2}$$

(420 §).

457 §.

457 §.

Aus der Tangente eines Winkels γ die Tangente seiner Hälfte $\frac{1}{2}\gamma$ zu finden.

Aufl. Man setze im 456 § $2\alpha = \gamma$, also $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$; so erhält man $\text{tang}\,\gamma = \frac{2\,tang\,\frac{1}{2}\gamma}{1 - tang\,\frac{1}{2}\gamma^2}$. Dies giebt $\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\gamma\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma^2 = 2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma$, oder $\text{tang}\,\gamma\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma^2 + 2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma = \text{tang}\,\gamma$. Also $\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{2}{tang\,\gamma}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma = 1$.

Man suche die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung nach dem 197 § A. R.: so erhält man

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma = -\frac{1}{tang\,\gamma} \pm r\left(1 + \frac{1}{tang\,\gamma^2}\right).$$

Da nun

$\frac{1}{tang\,\gamma} = \cot\gamma$, und $r(1 + \cot\gamma^2) = \text{cosec}\,\gamma$ (418. 419 §): so wird $\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma = -\cot\gamma \pm \text{cosec}\,\gamma$.

Die Ursache, warum hier zweene verschiedene Werthe gefunden werden, liegt in folgendem Umstand. Man sieht hier die Tangente eines Winkels als gegeben an, und eben diese Tangente gehört noch einem andern Winkel zu, der um 180° größer, oder kleiner ist. Wenn $\text{tang}\,\gamma = t$ ist, und $\gamma < 180°$; so ist zugleich $\text{tang}\,(\gamma + 180°) = t$ (413 §). Nun sucht man eigentlich die Tangente von der Hälfte desjenigen Winkels, dessen Tangente $= t$ ist; also muß die Rechnung sowohl $\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma$, als auch $\text{tang}\,(\frac{1}{2}\gamma + 90°)$ geben.

In dem Kreise ABKL, dessen Mittelpunct C ist 184
sey der Bogen AB das Maaß des Winkels $ACB = \gamma$, F.

seine Tangente AT. Man verlängere BC bis Y: so ist AT zugleich die Tangente des Bogens ABGY $= \gamma + 180°$. Soll man demnach von einem Bogen, dessen Tangente $= AT$ ist, die Hälfte nehmen: so ist dies so gut $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\gamma$, als auch $AG = \frac{1}{2}ABGY = \frac{1}{2}\gamma + 90°$. Die gesuchte Tangente des halben Bogens, dessen Tangente AB, ist also einmahl AZ, und zugleich auch $-AS$, so daß

$$AZ = \operatorname{cosec}\gamma - \cot\gamma,$$
$$AS = -\operatorname{cosec}\gamma - \cot\gamma.$$

Wenn also $\gamma < 180°$ ist: so ist $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cosec}\gamma - \cot\gamma$, also $\operatorname{cosec}\gamma = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma + \cot\gamma$.

458 §.

Aus der Cotangente eines Winkels γ die Cotangente seiner Hälfte $\frac{1}{2}\gamma$ zu finden.

Auflös. Die Gleichung $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma^2 + 2\frac{1}{\operatorname{tang}\gamma}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = 1$ (457 §) giebt $\frac{1}{-\cot\frac{1}{2}\gamma^2} + 2\cot\gamma\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\gamma} = 1$; also $1 + 2\cot\gamma\cot\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}\gamma^2$, und $\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - 2\cot\gamma\cot\frac{1}{2}\gamma = 1$. Daraus folgt $\cot\frac{1}{2}\gamma = \cot\gamma \pm \gamma(1 + \cot\gamma^2)$.

Also ist $\cot\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cosec}\gamma + \cot\gamma$, wenn $\gamma < 180°$ ist, und $\operatorname{cosec}\gamma = \cot\frac{1}{2}\gamma - \cot\gamma$.

Ist nun $\delta = 90° - \gamma$, oder $\gamma = 90° - \delta$; so wird $\operatorname{cosec}\gamma = \sec\delta$, $\cot\gamma = \operatorname{tang}\delta$, also $\sec\delta = \cot(45° - \frac{1}{2}\delta) - \operatorname{tang}\delta$. Da nun $\cot(45° - \frac{1}{2}\delta) = \operatorname{tang}(90 - (45° - \frac{1}{2}\delta)) = \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\delta)$; so wird $\sec\delta = \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\delta) - \operatorname{tang}\delta$, und $\sec\delta + \operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2}\delta)$.

Am Ende des vor. § war $\operatorname{cosec}\gamma = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma + \cot\gamma$,

$\cot\gamma$, dies gab $\sec\delta = \tang(45° - \frac{1}{2}\delta) + \tang\delta$, also $\sec\delta - \tang\delta = \tang(45° - \frac{1}{2}\delta)$.

459 §.

Aus dem Cosinus eines Winkels γ die Tangente und Cotangente seiner Hälfte zu finden.

Aufl. Es ist $\sin\frac{1}{2}\gamma = r\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}$, und $\cos\frac{1}{2}\gamma = r\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}$ (425 §); also $\tang\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$ (417 §) $= r\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}$, und $\cot\frac{1}{2}\gamma = r\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{1-\cos\gamma}}$ (418 §).

Man kan diese Gleichungen so verändern, daß sie die $\tang\frac{1}{2}\gamma$ durch beydes, den $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ ausdrücken. Es ist nemlich $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \cos\gamma$ und $\sin\frac{1}{2}\gamma = \tang\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma$ (418 §). Also $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma\tang\frac{1}{2}\gamma = \sin\gamma\tang\frac{1}{2}\gamma$ (424 §) Folglich $\sin\gamma\tang\frac{1}{2}\gamma = 1 - \cos\gamma$, und $\tang\frac{1}{2}\gamma = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$.

Es ist ferner $2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 + \cos\gamma$, und $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\tang\frac{1}{2}\gamma}$ (418 §). Also $2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\tang\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\tang\frac{1}{2}\gamma}$ (424 §). Folglich $1 + \cos\gamma = \frac{\sin\gamma}{\tang\frac{1}{2}\gamma}$, also auch $\tang\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}$.

Der XIX. Abschnitt.

Anwendung der Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts gradlinichter Figuren.

460 §.

182 F. Den Flächen-Inhalt eines Parallelograms *ABFC*, oder Dreyecks *ABC* auszurechnen, wenn zwo Seiten *AB*, *AC*, nebst dem eingeschlossenen Winkel *BAC* gegeben sind.

Aufl. Es sey AC=*b*, AB=*c*, BAC=α, BD auf AC senkrecht: so ist BD=$c \sin \alpha$ (439 §). Also das Parallelogramm ABFC=$bc \sin \alpha$ (276 §). Das Dreyeck ABC=$\frac{1}{2} bc \sin \alpha$ (279 §).

Es sey AC=54, 76 R, AB=127, 53 R, BAC=113° 16′; so wird

$l\,b = 1{,}7384634$
$l\,c = 2{,}1056124$
$l \sin \alpha = 9{,}9631625 - l \sin \text{tot}$

$l\,bc \sin \alpha = 3{,}8072383$

Also ABFC=6415, 615 Q. R.
und das Dreyeck ABC=3207, 807 Q. R.

Wenn man das Dreyeck sucht: so kan man noch vom

$l\,bc \sin \alpha = 3{,}8072383$
subtrahiren $l\,2 = 0{,}3010300$

so wird $l \frac{1}{2} bc \sin \alpha = 3{,}5062083$
wozu die Zahl 3207, 807 gehört.

Weil

Weil man durch Hülfe der Logarithmen den Inhalt nicht auf mehr, als 7 Ziffern sicher haben kan (157 § A. R.): so sucht man nur $BD = c \sin \alpha$ vermittelst der Logarithmen, und sodann das Product $AC \times BD$, oder $\frac{1}{2} AC \times BD$ durch die ordentliche Multiplication, wenn man den Inhalt auf mehr als 7 Ziffern genau haben will. So fände man im vorigen Exempel

$lBD = lc + l\sin\alpha - l\sin.\,tot = 2,0687749,$

Also $BD = 117,1588$. Das Pgr. $ABFC = 6415,615888$ Q. R, und $ABC = 3207,807999$, oder ABC fast $= 3207,808$ Q. R.

461 §.

Wenn die drey Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ eines Dreyecks ABC gegeben sind, den Inhalt zu finden, ohne vorher die Winkel zu berechnen. 181

Aufl. Es ist $\sin BAC = \frac{r((b+c)^2 - aa)(aa-(b-c)^2)}{2bc}$

(454 §. II Aufl.) und die Fläche $ABC = \frac{1}{2} bc \sin BAC$ (460 §). Also wird diese Fläche $= \frac{1}{4} r((b+c)^2 - aa)(aa-(b-c)^2)$, oder auch $ABC = \frac{1}{4} r(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

Man kan zur Uebung im Dreyeck ABC des 460 §, wo $AB = 127,53$ R, $AC = 54,76$ R, $BAC = 113° 16'$ ist, nach dem 453 § die Seite BC suchen: so ergiebt sich $BC = 157,4157$ R. Siehet man nun diese Seite $BC = a$, nebst $AC = b$, $AB = c$, als gegeben an, so giebt die Rechnung

$a = 157,4157$	$l(a+b+c) = 2,5311027$
$b = 54,76$	$l(a+b-c) = 1,9276049$
$a+b = 212,1775$	$l(a+c-b) = 2,3620783$
$c = 127,53$	$l(b+c-a) = 1,3957508$
$a+b+c = 339,7057$	Summe $8,2165367$
$a+b-c = 84,6457$	div. 2) $4,10826835$
$a+c = 284,9457$	$-l4 = 0,6020600$
$b = 54,76$	$l\,ABC = 3,50620835$
$a+c-b = 230,1857$	Also der gesuchte Inhalt
$b+c = 182,29$	des Dreyecks $= 3207,808$
$a = 157,4157$	Q. R. wie im vor. §.
$b+c-a = 24,8743$	

462 §.

Den Inhalt einer jeden gradlinichten Figur
191 auszurechnen, wenn ihre Seiten und Winkel;
F. oder statt der Winkel ihre Diagonalen gegeben sind.

Aufl. 1 Fall. Wenn die Figur regulär ist, wie das Fünfeck AENOL in der 191 F.: so sey jede Seite $AE = a$, die Anzahl der Seiten $= n$. Also ist der Centriwinkel $ACE = \frac{360°}{n}$, seine Helfte $ACB = \frac{180°}{n}$. Diesemnach ist der Halbmesser CM des in demselben zu beschreibenden Kreises $= \frac{1}{2}a\cot\frac{180°}{n}$, und das Polygon $= \frac{1}{4}naa\cot\frac{180°}{n}$.

Der halbe Centriwinkel, und der halbe Polygonwinkel ergänzen einander zu 90°. Wenn also der Polygonwinkel $= \Phi$ ist; so wird $CM = \frac{1}{2}a\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\Phi$, und der Inhalt $= \frac{1}{4}naa\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\Phi$.

Für

Für das Fünfeck ist $\frac{180°}{n} = 36°$. Wenn nun $a = 125{,}3$ R. ist; so findet man

la	$= 2{,}0979511$
laa	$= 4{,}1959022$
ln	$= 0{,}6989700$
$l \cot 36°$	$= 10{,}1387390 - 10$
Summe	$7{,}1315623$
$l4$	$= 0{,}6020600$
	$6{,}5295023$

Also der Inhalt des Polygons $= 3384561$ Q. R.

Wenn a eine große Zahl ist; so ist es am besten $CM = \frac{1}{2} a \cot \frac{180°}{n}$ allein vermittelst der Logarithmen zu berechnen, und das übrige durch die ordentliche Multiplication zu suchen.

Wäre statt der Seite AE der Halbmesser $CA = r$ des Kreises um das Polygon gegeben; so hätte man $AM = r \sin \frac{180°}{n}$, $CM = r \cos \frac{180°}{n}$, und es wäre der Inhalt des Polygons $= \frac{1}{2} nrr \sin \frac{180°}{n} \cos \frac{180°}{n}$. Oder, weil $\sin \frac{180°}{n} \cdot \cos \frac{180°}{n} = \frac{1}{2} \sin \frac{360°}{n}$ (424 §), so wird der Inhalt $= \frac{1}{4} nrr \sin \frac{360°}{n}$.

II Fall. Wenn die Figur irregulär ist; so kann man aus den gegebenen Seiten und Winkeln nicht

allein alle Diagonalen; sondern auch die diesen Diagonalen zugehörigen Höhen berechnen. Alsdenn verfährt man entweder nach dem 282 §, oder man berechnet blos die Diagonalen, und sucht den Inhalt eines jeden Dreyecks, worin die Figur vertheilt ist, nach dem 461 §, da dann zuletzt alles in eine Summe gebracht wird.

463 §.

182 F. Auf einer gegebenen Grundlinie *AC* ein Parallelogramm oder Dreyeck zu setzen, dessen Flächen Inhalt durch eine gegebene Zahl bestimt ist.

Aufl. Es komt nur darauf an, die Höhe dieses Parallelogramms, oder Dreyecks zu finden. Diese sey BD: so ist das Parallelogramm ABCF = AC × BD. Wenn demnach P die gegebene Zahl ist, welche den Flächen Inhalt ausdrückt, so hat man $P = AC \times BD$, also $BD = \frac{P}{AC}$. Demnach giebt der Inhalt P durch die gegebene Grundlinie dividirt, die Höhe. Man setze dieserwegen über AC eine senkrechte Linie $BD = \frac{P}{AC}$, und ziehe durch B mit AC die Parallele BF. Man ziehe ferner eine Linie AB, die beyde Parallelen schneidet, und mit derselben durch C eine Parallele CF: so hat das Parallelogramm ABFC den verlangten Inhalt. Die Winkel dieses Parallelogramms werden nicht bestimt, weil auf AC zwischen eben den Parallelen unzehlig viele Parallelogrammen gesetzt werden können, die alle gleich groß sind (105 §).

Soll

Soll über AC ein Dreyeck stehen, dessen Inhalt = T ist: so sucht man ebenfalls nur die Höhe BD desselben. Es ist aber $T = \frac{1}{2}AC \times BD$, also $BD = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$. Nachdem also die senkrechte Linie $BD = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ gemacht, und durch B mit AC die Parallele BF gezogen worden: nehme man in BF einen willkührlichen Punct B, ziehe AB und BC: so ist ABC das verlangte Dreyeck. Die Winkel desselben werden ebenfalls nicht bestimt, weil alle Dreyecke über AC, deren Spitzen in CD fallen, gleiches Inhalts sind (106 §). 181 F.

464 §.

Ausser der Grundlinie *AC* eines Parallelogramms oder Dreyecks ist noch eine Seite *AB*, die durch den Endpunct *A* der Grundlinie durchgehen soll, nebst dem Inhalt *P* oder *T* gegeben: man soll das Parallelogramm oder Dreyeck über *AC* verzeichnen. 182 F.

Aufl. Nachdem man, wie im vor. § die Höhe $= \frac{P}{AC}$ oder $\frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ gefunden, AG = dieser Höhe auf AC senkrecht gesetzt, und durch G die Parallele GF gezogen hat: beschreibe man aus A einen Kreis, mit einem Halbmesser, der so groß ist, als die gegebene Seite AB. Dieser wird die Parallele GF entweder in zweenen Puncten B und *b* schneiden; oder blos in einem Punct berühren, dafern $\frac{P}{AC}$ oder $\frac{T}{\frac{1}{2}AC}$

$\frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ = AB befunden wird, oder gar nicht treffen können, wenn $AB < \frac{P}{AC}$, oder $< \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ ist (79 §). Im letzten Fall läst sich aus den gegebenen Stücken gar kein Parallelogramm oder Dreyeck zu Stande bringen. Wenn es aber zweene Durchschnittspuncte B und *b* giebt: so ziehe man AB und CF ∥ AB, oder auch A*b*, und C*f* ∥ A*b*: so hat sowohl das Parallelogramm ABFC, als auch A*bf*C, die verlangten Eigenschaften.

Soll die Figur ein Dreyeck seyn, und man hat $AG = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ gemacht: so ziehe man entweder AB, und BC, oder A*b*, und *b*C. Nun hat wiederum sowohl das Dreyeck ABC als auch A*b*C die verlangte Beschaffenheit.

Die Winkel des Parallelogramms werden durch beyde gegebene Seiten, und den Inhalt bestimt. Es ist nemlich CAB = AB*b* (84 §) = A*b*B (55 §) = AC*f* (97 §). Beyde Parallelogrammen sind also, der Lage nach nur unterschieden.

Die Winkel des Dreyecks werden durch beyde gegebene Seiten, und den Inhalt nicht bestimt, so wie auch die dritte Seite nicht bestimt wird, ohne nur in dem einzigen Fall, wenn die Puncte B, *b* zusammen fallen, und der Kreis die Parallele berühret. Sonst giebt es allemahl zwo in Ansehung der übrigen Winkel und Seiten verschiedene Dreyecke ABC, und A*b*C, die der Aufgabe ein Genüge thun. Die Winkel bey A in beyden Dreyecken ergänzen einander zu 180°. Es ist nemlich CAB + ABF = 180°, und ABF = ACF = CA*b*, also auch CAB + CA*b* = 180°.

Weil

Weil $AG = AB.\sin BAC = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$: so wird

$\sin BAC = \frac{2T}{AB.AC}$, welches eine Regel giebt, den Winkel BAC aus dem gegebenen Flächen Inhalt, und den beyden Seiten, die ihn einschliessen, durch Rechnung zu finden. Dieser Sinus aber gehört sowohl zum Winkel BAC, als auch zu $2R \dot{-} BAC$, welches mit der Verzeichnung überein komt.

Der XX. Abschnitt.

Von der Kreismessung.

465 §.

Das Verhältniß zwischen dem Durchmesser eines Kreises, und seinem Umfange so genau, als verlangt wird, zu finden. 192 F.

Aufl. Es sey AB der vierte Theil von dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser $AC = BC$ ist. Man suche im 427 § zwischen

$2 \sin 39'' 33''' 2\frac{1}{1}\frac{3}{6}'''' = 0{,}000383495\,1946$

und $\sin 2(39'' 33''' 2\frac{1}{1}\frac{3}{6}'''') = 0{,}000383495\,1875$

die Differenz $0{,}000000000071$

so erhellet, daß man einen Bogen von $39'' 33''' 2\frac{1}{1}\frac{3}{6}''''$ seinem Sinus gleich setzen könne, und daß der Irthum kein $\frac{1}{10000000000}$ Theilchen des Halbmessers betrage (429 §). Demnach ist $\frac{1}{8192}AB = 0{,}000191747597\,3$. Man nehme $AD = \frac{1}{8192}AB$,

AB, und CE $= \frac{1}{81\,92}$ CB; so hat man die Proportion CE : AD = CB : AB (181 §). Wenn nun CB = 1, so erhält man in Decimaltheilen CE = 0,000122070 3125 und es wird 1220703125 : 19174 75973 = CB : AB, wo aber die zwote Zahl etwas weniges zu klein ist: jedoch sind nur die letzten beyden Ziffern zweifelhaft. Setzt man nun CB = 10000000; so findet man nach der Regel Detri AB = 15707963,17, und 2 AB = dem halben Umfang ABF = 31415926,34. Ist also CB = r, und der ganze Umfang P: so ist $r : \frac{1}{2}P = 2r : P = 10000000 : 31415926,34$ = dem Durchmesser zur Peripherie. Es ist zweifelhaft, wie weit die letzten beyden Ziffern richtig sind, weil man nicht weiß, wie weit die beyden letzten Ziffern in der für AD angenommenen Zahl, richtig sind, und man kan nur so viel festsetzen, der Umfang des Kreises müsse etwas größer, als 31415926 seyn, wenn der Durchmesser = 10000000 ist.

Man schliesse nun nach dem 426 § $\sin 2\alpha : \sin\alpha = 2\sin\alpha - \sin 2\alpha : \operatorname{tang}\alpha - \sin\alpha$, indem man $\alpha = 39'' 33''' 2\frac{13}{16}''''$ setzt: so erhält man die Differenz zwischen der Tangente und den Sinus dieses Bogens = 0,000000000000040, also die Tangente = 0,000019174760 13, welche größer, als der Bogen ist. Schliest man demnach 1220703125 : 19174760 13 = 10000000 : 15707963,47, und verdoppelt, wie vorhin die letzte Zahl: so weiß man, daß der Umfang kleiner sey, als 31415926,94, wenn der Durchmesser 10000000 ist. Demnach fällt das Verhältniß $2r : P$ zwischen den beyden Grenzen 10000000 : 31415926 und 10000000 : 31415927, und man kan das erste behalten, ohne um $\frac{1}{10000000}$ Theilchen des Halbmessers zu irren.

Diese

Diese gefundenen Grenzen sind weit genauer, als diejenigen, welche schon Archimedes angegeben hat. Es nimt nemlich für diese beyde Grenzen die Verhältnisse $7:21\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ und $7:22$. Jenes giebt $1:3,02012$, also P um mehr, als $\frac{1}{1\,0}d$ zu klein, dieses aber $1:3,1428$, also P nur etwas weniges über $\frac{1}{1\,0\,0}d$ zu groß, daß also das letzte weit richtiger, als das erste ist.

Wenn man weitläuftige Rechnungen nicht scheuet, so kan man aus eben den Gründen viel engere Grenzen herleiten, zwischen welchen das Verhältniß $2r:P$ fallen muß. Man muß nur mit Halbirung der Bogen fortfahren, und vermittelst der vorhin gebrauchten Kenzeichen beurtheilen, wie weit die Bogen, die man herausbringt, noch von ihren Sinus und Tangenten unterschieden sind. So hat **Ludolph von Ceulen** gefunden, wenn der Durchmesser $= 1$ ist, daß der Umfang größer, als

$3,14159265358979323846264338387950$,

und kleiner, als diese Zahl sey, wenn statt der letzten Ziffer 0 die Ziffer 1 gesetzt wird. Er hat die in dieser Absicht nöthigen Rechnungen und Vortheile in den vom **Snellius** in die lateinische Sprache übersetzten Schriften De circulo et adscriptis, imgleichen Fundamenta Arithmetica et Geometrica beschrieben.

466 §.

Die im vor. § gebrauchte Art, das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser zu finden, verdient noch etwas genauer erwogen zu werden. Wenn A einen Kreisbogen bedeutet: so ist allemahl $\sin\frac{1}{n}A <$

$\frac{1}{n}A$,

$\frac{1}{n}A$, also $n \sin \frac{1}{n}A < A$. Ferner ist allemahl $\tang \frac{1}{n}A > \frac{1}{n}A$, also $n \tang \frac{1}{n}A > A$. Diese beyden Sätze sind allemahl wahr, wie groß auch n genommen wird. Wäre nun $n \sin \frac{1}{n}A + e = A$, und $n \tang \frac{1}{n}A - f = A$: so werden e und f verschwinden, wenn $n = \infty$ wird. Denn es ist $\frac{1}{n}A = 0$, wenn $n = \infty$ wird, und $\frac{\sin \frac{1}{n}A}{\tang \frac{1}{n}A} = \cos \frac{1}{n}A = 1$, also $\sin \frac{1}{n}A = \tang \frac{1}{n}A$, und $A - e = A + f$, wenn $n = \infty$ wird. Dies ist nur möglich, dafern $e = 0$, und $f = 0$ ist. Demnach wird $\infty \sin \frac{1}{\infty}A = A$, und $\infty \tang \frac{1}{\infty}A = A$, also auch $\sin \frac{1}{\infty}A = \frac{1}{\infty}A$, und $\tang \frac{1}{\infty}A = \frac{1}{\infty}A$.

Es sey ein Bogen $B = 2A$, also $A = \frac{1}{2}B$, so hat man auch $\infty \sin \frac{\frac{1}{2}B}{\infty} = \frac{1}{2}B$, und $\infty \, 2 \sin \frac{\frac{1}{2}B}{\infty} = B$. Wenn nun der Ausdruck chord. a die Sehne eines Kreisbogens a bedeutet: so ist $2 \sin \frac{\frac{1}{2}B}{\infty} = \text{chord} \frac{1}{\infty}B$, also auch $\infty \text{ chord} \frac{1}{\infty}B = B$, und $\text{chord} \frac{1}{\infty}B = \frac{1}{\infty}B$. Diese Ausdrücke rechtfertigen fol-

gende

gende Redensarten. Der Sinus, die Tangente, auch die Sehne eines unendlich kleinen Kreisbogens, ist dem zugehörigen Bogen gleich, und jeder Kreisbogen ist als ein Stück eines regulären Polygons anzusehen, das unendlich viele unendlich kleine Seiten hat. Man muß diese Redensarten so erklären, wie es den im II Abschnitt der A. R. erklärten Begriffen des unendlichen gemäß ist.

Die Verhältnisse $\frac{\sin \frac{1}{n}A}{\frac{1}{n}A}$, $\frac{\tang \frac{1}{n}A}{\frac{1}{n}A}$, $\frac{\mathrm{chord}\, \frac{1}{n}A}{\frac{1}{n}A}$ ändern sich, wenn sich der Bogen $\frac{1}{n}A$, oder die Zahl n ändert, und ihre Glieder kommen einander immer näher, je größer n genommen wird. Wenn man annimt, n erreiche die Grenze $= \infty$: so werden beyde Glieder gleich groß; oder die letzten unter allen Werthen, welche beyde Glieder dieser Verhältnisse haben können, werden einander gleich.

Die Brüche $\frac{\sin \frac{1}{n}A}{\frac{1}{n}A}$ und $\frac{\mathrm{chord}\, \frac{1}{n}A}{\frac{1}{n}A}$ sind kleiner, als 1, und der Bruch $\frac{\tang \frac{1}{n}A}{\frac{1}{n}A} > 1$; aber jene beyden Brüche wachsen, und dieser nimt ab, wenn n wächst. Der Werth $= 1$ ist die Grenze, über welche jene beyde nicht wachsen können, und unter welche dieser nicht abnehmen kan, n mag so groß, als man will, genommen werden.

Wenn man einen Kreisbogen A in n gleiche Theile theilt, und die Sehnen dieser Bogen ziehet; so machen diese Sehnen zusammen eine Linie aus, die

man

man eine regulär gebrochne Linie nennen könte. Sie ist $= n \operatorname{chord} \frac{1}{n} A$, und sie ist allemahl kleiner, als A, wie groß auch n genommen wird. Inzwischen nähern sich beyde Werthe einander desto mehr, je größer n genommen wird, und der Werth $= A$ ist unter allen Werthen des Ausdrucks $n \operatorname{chord} \frac{1}{n} A$, wenn n ohne Aufhören wächst, der letzte; oder der Kreisbogen kan als die letzte unter allen regulär gebrochnen Linien angesehen werden, die sich in demselben beschreiben lassen. Eigentlich ist er die Grenze aller dieser gebrochenen Linien, die sie nie erreichen, so lange n einen bestimten Werth hat.

In dem Ausdruck $\infty \operatorname{chord} \frac{1}{\infty} A = A$ kan A den ganzen Umfang des Kreises bedeuten. Ist also dieser $= P$; so hat man auch $\infty \operatorname{chord} \frac{1}{\infty} P = P$. Wenn in dem Kreise ein Polygon beschrieben ist, das n Seiten hat; so ist der Umfang desselben $= n \operatorname{chord} \frac{1}{n} P$, und der Abstand der Seiten dieses Polygons vom Mittelpunct $= r \operatorname{cos} \frac{1}{2n} P$, wenn r der Halbmesser ist (§ 462). Demnach wird der Flächen Inhalt des Polygons $= \frac{1}{2} r n \operatorname{chord} \frac{1}{n} P \operatorname{cos} \frac{1}{2n} P$. Wird $n = \infty$, so wird der Umfang $= \infty \operatorname{chord} \frac{1}{\infty} P$, und

der

der Inhalt $= \frac{1}{2} r \infty \text{chord} \frac{1}{\infty} P = \frac{1}{2} r P$, weil nemlich $\infty \text{chord} \frac{1}{\infty} P = P$, und $\text{cos} \frac{1}{2\infty} P = 1$ ist. Dies rechtfertiget die Redensart: Der Kreis sey ein reguläres Polygon, das unendlich viele unendlich kleine Seiten hat. Es ist nemlich der Kreis unter allen in demselben beschriebenen Polygonen als das letzte anzusehen, und der Umfang desselben, als der Umfang des letzten aller dieser Polygonen, wenn n ohne Aufhören wächst. Die Kreislinie ist die Grenze, welcher sich die Peripherien, und die Kreisfläche die Grenze, welcher sich die Flächen dieser Polygone ohne Aufhören nähern. Die um den Kreis beschriebenen Polygone nähern sich dem Kreise auf eine ähnliche Art, wenn die Anzahl ihrer Seiten ohne Aufhören wächst.

467 §.

Wenn man hinführo ein für allemahl die Zahl 3,1415926 u. s. f. $= \pi$ setzt, den Halbmesser eines Kreises $= r$, seinen Durchmesser $= d$, seinen Umfang $= p$: so ist $p = 2r\pi = \pi d$ (286 §). Also kan man den Umfang eines Kreises auch oft vortheilhaft vermittelst der Logarithmen suchen, wenn der Halbmesser oder Durchmesser gegeben ist. Man findet nemlich $l\pi = l\,3{,}1415926 = 0{,}4971498$. Wäre demnach $r = 5793863$ F, also $2r = d = 11587726$ F: so erhielte man

$$l\,11587726 = 7{,}0639983$$
$$l\,3{,}1415926 = 0{,}4971498$$
$$lp = 7{,}5611481$$

Also $p = 36403901{,}7$ F.

Ist a die Länge eines Kreisbogens vom Halbmesser r, und die Anzahl der Grade, die er fast, $= n$; so ist $a = \frac{n}{360°} p$ (286 §) $= \frac{n}{360°} 2r\pi =$ $\frac{n}{180°} r\pi$, wo man 360° oder 180° nach dem 147 § R. in Minuten oder Secunden verwandeln muß, wenn der Bogen auſſer den Graden noch Minuten und Secunden enthält. Ueberhaupt müssen n und 360° auf einerley Nahmen gebracht seyn.

Wenn der Durchmesser 4726 F, also $r = 2363$ F, und der gegebene Bogen 56° 24′ 17″ hält; so ist $n = 203057''$, und $180° = 648000''$. Nimt man also $\pi = 3,1415926$, so wird $a = \frac{203057 \times 2363 \times 3,1415926}{648000}$, wo man wieder mit Vortheil die Logarithmen braucht. Es wird

$l\ 203057 = 5,3076180$

$l\ 2363 = 3,3734637$

$l\ 3,1415926 = 0,4971498$

$9,1782315$

$l\ 648000 = 5,8115750$

$3,3666565$

Also $a = 2326,251$ F.

468 §.

Weil $l180 = 2{,}2552724$

und $l\pi = 0{,}4971498$

so ist $l\frac{180}{\pi} = 1{,}7581226$

ferner $l60 = 1{,}7781513$

Also $l\frac{180 \times 60}{\pi} = 3{,}5362739$

und $l\frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} = 5{,}3144252$

Diese Logarithmen dienen dazu, die Berechnung der Kreisbogen zu verkürzen. Es sey nemlich der gegebene Bogen α in Graden ausgedrückt, so daß $\alpha = n°$; so ist $\alpha = \frac{n°\pi}{180} r = n°r : \frac{180}{\pi}$, also $l\alpha = ln + lr - l\frac{180}{\pi}$. Wenn $\alpha = n$ Minut, so wird $\alpha = \frac{n'\pi}{180 \times 60} r = n'r : \frac{180 \times 60}{\pi}$, und $l\alpha = ln' + lr - l\frac{180 \times 60}{\pi}$. Wenn $\alpha = n$ Secund, so erhält man $\alpha = \frac{n''\pi}{180 \times 60 \times 60} r$, also $l\alpha = ln + lr - l\frac{180 \times 60 \times 60}{\pi}$. Deswegen kan man das vorige Exempel, wo $n = 203057''$, und $r = 2363$ F. war, so berechnen

$$l n = 5,3076180$$

$$l r = 3,3734637$$

$$8,6810817$$

$$l \frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} = 5,3144252$$

$l a = 3,3666565$ wie vorhin.

469 §.

Wenn der Halbmesser $= 1$ ist, so ist

$$\pi = 3,14159265 36 \quad (465\,\S)$$

$$\text{also } \frac{1}{180}\pi = 0,0174532925$$

$$\frac{1}{180 \times 60}\pi = 0,0002908882$$

$$\frac{1}{180 \times 60 \times 60}\pi = 0,0000004848 1.$$

Die letzten drey Zahlen drücken die Länge eines Grades, einer Minute, einer Secunde aus, wenn der Halbmesser $= 1$ ist, und man kan vermittelst dieser Zahlen die Länge eines jeden andern Bogens für den Halbmesser $= 1$ leicht finden. Soll der Bogen $56° 24' 17''$ halten: so rechnet man auf folgende Art. Wenn die Ausdrücke $An°$, An', An'' Bogen von $n°$, $n' n''$ für den Halbmesser $= 1$ bezeichnen: so wird

A 1° = 0,0174532925
mult. mit 56°

1047197550
872664625

A 56° = 0,9773843800
A 1′ = 0,0002908882
mult. mit 24

11635528
5817764

A 24′ = 0,0069813168
A 1″ = 0,0000048481
mult. mit 17

339367
48481

A 17″ = 0,0000824177
A 56° 24′ 17″ = 0,9844481145.

Wenn nun ein Bogen a zu dem Halbmesser r gehört, und eben so viel Grade, Minuten, und Secunden enthält: so darf man nur die gefundene Zahl mit dem Halbmesser r multipliciren, um den Bogen a sehr genau zu haben. So erhält man für $r =$ 2363 den Bogen $a =$ 2326,2508945635.

47° §.

Die Gleichungen $p = 2r\pi$, oder $p = \pi d$ geben $r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}p$, oder $d = \frac{1}{\pi}p$, worin die Regel des 287 § liegt, aus dem Umfang den Durchmesser, oder Halbmesser zu finden.

Setzt man $\pi = 3,1415926$; so wird $\frac{1}{\pi} =$

0,31830989, wo die letzte Ziffer ein wenig zu groß ist, weil π etwas größer, als die dafür angenommene Zahl ist. Nimt man die Ludolffschen Zahlen alle statt π; so erhält man

$$\frac{1}{\pi} = 0,318309886183790671553776792674502$$

Wenn also die Zahl mit p, oder $\frac{1}{2}p$ multiplicirt wird: so ergiebt sich im ersten Fall der Durchmesser, im zweeten Fall der Halbmesser. Will man die Logarithmen brauchen: so wird $ld = lp - l\pi$, oder $lr = l\frac{1}{2}p - l\pi$.

Ist $p = 75839$ F.: so wird

$lp = 4,8798926$
$l\pi = 0,4971498$
$ld = 4,3827428$

also $d = 24140,3$ F. und $r = 12070,15$ F.

471 §.

Die Gleichung $\alpha = \frac{n}{180^\circ} r\pi$ (467 §) giebt

$n = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{r}$, und hierin liegt die Regel, wie man aus der gegebenen Länge eines Bogens, und dem zugehörigen Halbmesser, die Anzahl der Grade, Minuten, u. s. f. dieses Bogens finde. Man könte zuerst den ganzen Umfang aus dem gegebenen Halbmesser suchen, und sodann nach dem 287 § verfahren, indem die dort angegebene Regel auch in dieser Gleichung liegt. Allein man hat nicht nöthig, erstlich

den Umfang zu suchen, wenn man aus dieser Gleichung vermittelst der Logarithmen rechnet.

Es wird nemlich $ln^\circ = l\alpha + l\frac{180^\circ}{\pi} - lr$, oder

$ln' = l\alpha + l\frac{180 \times 60}{\pi} - lr$, oder $ln'' = l\alpha + l\frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} - lr$, nachdem man n in Graden, Minuten, oder Secunden sucht. Es sey der Bogen $\alpha = 7813$ F, und der Halbmesser $= 5312$ F.: so giebt die Rechnung

$l\alpha = 3{,}8928178$

$l\frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} = 5{,}3144252$ (468 §)

$9{,}2072430$

$lr = 3{,}7252581$

$ln'' = 5{,}4819849$

Also ist $\alpha = 303378{,}6'' = 84^\circ\ 16'\ 18\frac{3}{5}''$.

472 §.

Wenn φ ein Bogen ist für den Halbmesser $= 1$, und eben so viel Grade, Minuten, Secunden, u. s. f. als α enthält; so ist $\varphi = \frac{n}{180^\circ}\pi$ (467 §) und die allgemeine Gleichung $\alpha = \frac{n}{180^\circ} r\pi$ giebt $\frac{\alpha}{r} = \frac{n}{180^\circ}\pi$, also ist $\frac{\alpha}{r} = \varphi$. Jeder Bogen demnach

durch seinen Halbmesser dividirt giebt einen Bogen für den Halbmesser $= 1$, der eben so viel Grade, Minuten, u. s. f. als der vorige enthält, weil dies ähnliche Bogen sind, die sich wie ihre Halbmesser verhalten (227 §).

Hierauf gründet sich eine Art, die Größe eines Winkels auszudrücken, die von der bisher gewöhnlichen zwar unterschieden ist, übrigens aber mit derselben auf einerley Gründe beruhet, und allemahl mit Vortheil gebraucht wird, wenn man die allgemeine Rechenkunst auf die Geometrie anwendet.

193 F. Zwischen den Schenkeln des Winkels BAC sey mit dem Halbmesser $AB = 1$ der Bogen $BC = \varphi$ beschrieben. Man nehme den Bogen $CD = AB = 1$, und ziehe AD; so ist $DAC : BAC = DC : BC = 1 : \varphi$. Demnach drückt φ aus, wie groß BAC gegen DAC sey, wenn φ in Theilen des Halbmessers als eine Zahl gegeben ist. Dieserwegen kan man den Winkel DAC, welchen der seinem Halbmesser gleiche Bogen bestimt, für das Maaß aller übrigen Winkel annehmen, da man weiß, daß er für alle Halbmesser von einerley Größe ist (288 §). Wenn nemlich mit einem andern Halbmesser AF ein Bogen $FG = AF$ beschrieben, und AG gezogen wird: so muß AG in AD fallen. In dieser Voraussetzung kan man demnach $BAC = \varphi$, oder $BAC = \frac{FH}{AF} = \frac{\alpha}{r}$ setzen, wenn $FH = \alpha$, und $AF = r$ ist. Es bleibt hier also nicht mehr der 90ste Theil des rechten Winkels die Einheit, oder das Maaß aller Winkel; sondern die Einheit wird ein Winkel, der 57,3 solcher Theile enthält, wie im 289 § gefunden worden.

473 §.

Die Anzahl der Grade dieses Winkels ist eigentlich $= \frac{180°}{\pi}$, wie nicht allein aus dem 289 §; sondern auch aus der Gleichung $n = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{r}$ (471 §) erhellet, wenn man $\alpha = r$ setzet. Nimt man demnach $\pi = 3{,}1415926$; so findet man durch die Division genauer, als im 289 §, diesen Winkel $=$ $57{,}29578° = 57° 17' 44'' 48'''$.

Nun kan es an sich gleichviel seyn, mit welcher Einheit man einen jeden andern Winkel messen will, da es bekant ist, wie viel Grade, Minuten, u. s. f. diese andre Einheit ausmachen. Ein Winkel der $= \frac{\alpha}{r}$ gesetzt ist, wird in Graden ausgedrückt, wenn man die Zahl $\frac{\alpha}{r}$ mit $57°,29578°$ multiplicirt, d. i. für jede Einheit, die $=$ CAD ist, 57,29578 Grade rechnet, wie auch die Gleichung $n = \frac{180°}{\pi}$ unmittelbar ausdrückt (471 §).

Diese Art, die Winkel zu messen, hängt mit dem 252 § zusammen. Wenn zwischen den Schenkeln der beyden Winkel w und W, mit den Halbmessern r, R, die Bogen a, A beschrieben sind; so ist

$$w : W = \begin{pmatrix} a : A \\ R : r \end{pmatrix} = a \times R : A \times r = \frac{a}{r} : \frac{A}{R}.$$

Nimt man also $a = r$, so wird $w : W = 1 : \frac{A}{R}$,

und der Quotient $\frac{A}{R}$ drückt die Größe des Winkels W gegen w aus, wo $w = 57° 17' 44'' 48'''$ ist.

474 §.

Eigentlich aber ist in der Gleichung $\varphi = \frac{\alpha}{r}$ allemahl φ ein Kreisbogen, der mit dem Halbmesser $= 1$ aus der Spitze des Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben worden. Hieraus ergiebt sich zugleich, was die Gleichungen $\alpha = r \times \varphi$, und $r = \frac{\alpha}{\varphi}$ sagen wollen. Die erste $\alpha = r \times \varphi$ giebt die Größe eines Kreisbogens aus seinem Halbmesser, und der durch die Einheit von 57,3° ausgedrückten Größe des zugehörigen Winkels. Sie ist mit der Gleichung $\alpha = \frac{n\pi}{180°} r$ (467 §) einerley, wenn man statt φ seinen Werth $\frac{n\pi}{180°}$ (472 §) setzt, da dann α durch den Halbmesser, und die Anzahl seiner Grade bestimt wird.

Die zwote Gleichung $r = \frac{\alpha}{\varphi}$ bestimt den Halbmesser aus der Größe des Bogens α, und der, durch die Einheit von 57,3 Grade, ausgedrückten Größe des zugehörigen Winkels. Sie ist einerley mit der Gleichung $r = \frac{180°}{n\pi} \alpha$, wenn $\varphi = \frac{n\pi}{180}$ gesetzt wird, und dies bestimt den Halbmesser aus der Länge des Bogens, nebst der Anzahl seiner Grade, wie

im

im 290 §. Denn es liegt darin die Proportion $n : \frac{180^\circ}{\pi} = \alpha : r$, wo $\frac{180^\circ}{\pi}$ die Anzahl der Grade des dem Halbmesser gleichen Bogens, und n die Anzahl der Grade des Bogens α ist. Man kan nun bey der Auflösung dieser Aufgabe des 290 § auch mit Vortheil die Logarithmen brauchen. Es wird nemlich $lr = l\frac{180^\circ}{\pi} + l\alpha - ln$, da dann $l\frac{180^\circ}{\pi} =$ 1,7581226 ist, wenn n in Graden und Decimaltheilen von Graden ausgedrückt ist. Hat man aber n in Minuten, oder Secunden ausgedrückt: so wird $lr = l\frac{180^\circ \times 60}{\pi} + l\alpha - ln'$, oder $l\frac{180^\circ \times 60 \times 60}{\pi} + l\alpha - ln''$.

Es sey der Bogen = 57107,55 R, und fasse 1°: so ist $ln = 0$, und es wird

$$l\frac{180^\circ}{\pi} = 1{,}7581226$$
$$l\alpha = 4{,}7566934$$
$$lr = 6{,}5148160$$

Also $r = 3272020$.

475 §.

Wenn nun die Kreisfläche = C ist, für den Halbmesser = r, oder Durchmesser d, und Umfang p; so ist $C = \frac{1}{4}d \times p$ (291 §) $= \frac{1}{4}\pi dd$, weil $p = \pi d$, oder auch $C = \pi rr$, weil $d = 2r$. Also ist $1 : \frac{1}{4}\pi = dd : C$. Nun ist $\frac{1}{4}\pi = 0{,}7853981$, also wird $1 : 0{,}7853981 = dd : C$, welches das Verhältniß vom Quadrat des Durchmessers zur Kreisfläche genauer angiebt, als es im 290 § gefunden ist.

Weil

Weil auch $d = \frac{p}{\pi}$ (465 §); so wird $C = \frac{pp}{4\pi}$, dies giebt $1 : \frac{1}{4\pi} = pp : C$. Aber $\frac{1}{4\pi} =$ 0,07957747 (470 §). Demnach wird 1:0,07957747 $= pp : C$, welches das Verhältniß vom Quadrat des Umfangs zur Kreisfläche ist.

Wäre $p = 75839$ F.: so findet man $pp =$ 5751553921, und $\frac{1}{4\pi} pp = 457694109{,}60175987$ Q. F. für die Kreisfläche. Sucht man d aus p: so findet man $d = \frac{1}{\pi} p$ (469 §) $= 24140{,}30298932$ F, und dies giebt für $C = \frac{1}{4} d \times p$ eben die Zahl.

476 §.

Wenn die Kreisfläche gegeben ist, die Größe des Durchmessers, oder des Umfangs zu finden.

Aufl. Weil $C = \frac{1}{4}\pi dd$; so erhält man $dd = 4\frac{1}{\pi} C$, und $d = 2r\frac{1}{\pi} C = 2r\,0{,}31830988 \times C$

Also ist der Durchmesser die doppelte Quadratwurzel aus dem Product der Zahl 0,31830988 in den gegebenen Inhalt. Es sey $C = 10028{,}75$; so findet man $0{,}31830988 \times C = 3192{,}25020905$. Hievon ist die Quadratwurzel $= 56{,}50000001$, also der Durchmesser $113{,}00000002$ fast $= 113$.

Weil auch $C = \frac{1}{4\pi} pp$: so wird $pp = 4\pi C$, und $p = 2r\pi C = 2r\,3{,}1415926 \times C$. Demnach ist

ist der Umfang die doppelte Quadratwurzel aus dem Product der Zahl 3,1415926 in den Inhalt. Es sey wiederum C = 10028,75: so ergiebt sich 3,1415926 × C = 31506,24679125. Hievon ist die Quadratwurzel = 177,49999, oder fast 177,5, also der Umfang = 355.

477 §.

Es sey der Inhalt des Kreisausschnitts ABMC = S, des Abschnitts BMCN = s; so ist S = $a \times \frac{1}{2}r$ F. und $s = a \times \frac{1}{2}r$ − Dr. ABC (292 §). Sucht man den Ausschnitt eines Bogens a von 56° 24′ 17″ für den Halbmesser r = 2363 F: so findet man 193

a = 2326,2508945635 (469 §)

Nun ist $\frac{1}{2}r$ = 1181,5

2326250,89456
232625,08945
186100,07156
2326,25089
1163,12544

Also S = 2748465,4319 Q. F.

Die, der Grundlinie AC = r = AB zugehörige Höhe BK des Dreyecks ABC giebt die Proportion sin. tot: AB = sin BAC: BK. Also rechnet man

12363

$l 2363 = 3{,}3734637$
$l \sin 56° 24' 17'' = 9{,}9206276$
$l BK = 13{,}2940913 - 10$
Also $BK = 1968{,}3$
$\frac{1}{2} r = 1181{,}5$

98415
19683
157464
19683
19683

$ABC = 2325546{,}45$
$S = 2748465{,}4319$
$s = 422918{,}9819$ Q. F.

Sucht man demnach s, so wird die Rechnung verkürzt, wenn man die Differenz $\alpha - \frac{r \sin BAC}{\sin. tot}$ mit $\frac{1}{2} r$ multiplicirt, weil $s = S - ABC =$
$\left(\alpha - \frac{r \sin BAC}{\sin. tot}\right) \times \frac{1}{2} r.$

478 §.

Weil $\alpha = \frac{n\pi}{180°} r$; so wird $S = \alpha \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} \frac{n\pi}{180°} rr$, wo $\frac{n\pi}{180°} = An°$ ist (469 §), und $\frac{1}{2} \frac{n\pi}{180°}$ der diesem Bogen zugehörige Ausschnitt.

Demnach läst sich der Inhalt eines jeden Kreisausschnitts S auch aus den Zahlen des 469 § finden, wenn

wenn man den Bogen von n Graden für den Halbmesser $= 1$ sucht, und in das halbe Quadrat des Halbmessers multiplicirt. Dieserwegen liesse sich das vorige Exempel auch so berechnen

$$A\ 56^\circ\ 24'\ 17'' = 0{,}984448 1145$$
$$\tfrac{1}{2}rr = 2791884{,}5$$

1968896,2290
689113,58015
88600,33030
984,44811
787,55848
78,75584
3,93779
49222

$$S = 2748465{,}4319 \text{ Q. F.}$$

Verlangte man S nur in ganzen Zahlen richtig: so könnte man in diesem Exempel noch die Logarithmen brauchen. Es ist nemlich $lS = ln + lrr - l2 - l\frac{180^\circ}{\pi}$. Dieserwegen kan man so rechnen.

$$lr = 3{,}3734637$$
$$lrr = 6{,}7469274$$
$$ln = 5{,}3076180$$
$$lnrr = 12{,}0545454$$
$$l2 = 0{,}3010300$$
$$l\tfrac{1}{2}nrr = 11{,}7535154$$
$$l\frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} = 5{,}3144252 \quad (468\ \S)$$
$$lS = 6{,}4390902$$

welches $S = 2748465$ Q. F. giebt. Wenn r aus

mehr

mehr, denn vier Ziffern bestünde: so würde man S auch in ganzen Zahlen vermittelst der Logarithmen nicht mehr richtig herausbringen.

479 §.

Weil $r = \frac{180^\circ}{n\pi} a$; so wird auch $S = a \times \frac{1}{2} r$ $= \frac{1}{2} \frac{180^\circ}{n\pi} aa$. Wenn demnach a und n gegeben sind: so dient dieser Ausdruck, den Ausschnitt S zu finden, ohne daß es nöthig ist, vorher den Halbmesser r zu berechnen. Die Logarithmen lassen sich hier nur mit Vortheil gebrauchen, wenn a keine grosse Zahl ist.

Es sey $a = 59\frac{1}{6}$ F, und $n = 60^\circ$: so giebt die Rechnung

$$la = 1{,}77207704$$
$$laa = 3{,}54415408$$
$$l\frac{180}{\pi} = 1{,}7581226$$

$$l\frac{180}{\pi} aa = 5{,}30227668$$
$$l2n = 2{,}0791812$$

$$lS = 3{,}22309548$$

Also $S = 1617{,}458$ Q. F.

Weil $\frac{n\pi}{180^\circ} = An^\circ$ (472 §): so läst sich S auch so ausdrücken, $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{aa}{An^\circ}$ und man könte

das

das halbe Quadrat des gegebenen Bogens α durch den ähnlichen, dem Halbmesser = 1 zugehörigen Bogen von n Graden dividiren, um S zu finden.

480 §.

Der Ausdruck für den Abschnitt $s = \left(\alpha - \frac{r \sin \text{BAC}}{\sin tot}\right) \cdot \frac{1}{2} r$ (477 §) liesse sich auch so verändern. Für den ganzen Sinus = 1, und BAC $= n°$, ist $\frac{r \sin \text{BAC}}{\sin tot} = r \sin \frac{n\pi}{180°}$. Da nun $\alpha = \frac{n\pi}{180°} r$; so wird $s = \frac{1}{2} rr \left(\frac{n\pi}{180°} - \sin \frac{n\pi}{180°}\right)$.

Dieser Ausdruck könte dienen, den Abschnitt aus dem gegebenen Winkel am Mittelpunct, und Halbmesser zu berechnen, ohne vorher den Bogen α besonders zu suchen. Es sey z. E. $r = 56{,}5$ F, und $n = 60°$: so hat man

$$\frac{n\pi}{180°} = \frac{1}{3}\pi = 1{,}047197551\,2$$

$$\sin \frac{n\pi}{180°} = \sin \frac{1}{3}\pi = 0{,}866025403\,7 \quad (421\,\S)$$

$$\frac{n\pi}{180} - \sin \frac{n\pi}{180°} = 0{,}181172147\,5$$

$$\frac{1}{2} rr = 1596{,}125$$

	181,1721475
	90,5860737
	16,3054932
	1,0870328
	181172
	36234
	9058
Also s =	289,173393 Q. F.

Der Halbmesser $r = 56{,}5$ F, giebt für $n = 60°$ den Bogen $a = 59\frac{1}{6}$ F, und vermöge der im vor. § angestellten Rechnung

$S = 1671{,}4580$ Q. F.

Ferner $ABC = 1382{,}2846$

also $S - ABC = 289{,}1734 = s$, wie vorhin.

Weil $r = \frac{180°}{n\pi} a$; so wird auch $s = \frac{1}{2}\frac{(180)^2}{n^2\pi^2} \cdot \left(\frac{n\pi}{180°} - \sin\frac{n\pi}{180}\right) aa$, welches den Abschnitt durch den Bogen ausdrückt, und dienen könte, den Abschnitt aus dem Bogen zu berechnen, ohne vorher den Halbmesser zu suchen.

481 §.

Die Seite eines Quadrats, das einer gegebenen Figur gleich ist, durch Rechnung zu finden, oder die gegebene Figur arithmetisch zu quadriren.

Aufl. Man suche den Flächen Inhalt der Figur, und ziehe aus der Zahl, die diesen Inhalt ausdrückt, die Quadrat Wurzel: so giebt diese die Seite des der Figur gleichen Quadrats. Denn ein Quadrat, dessen Seite durch diese Zahl nach eben dem Maaß ausgedrückt wird, welches bey der gegebenen Figur gebraucht worden, hat mit derselben einerley Inhalt.

Eben so läst sich demnach sowohl die ganze Kreisfläche, als auch jeder Ausschnitt und Abschnitt des Kreises, quadriren, und die Richtigkeit dieser Quadratur hängt von der Richtigkeit der Zahlen ab, welche das Verhältniß $\pi : 1$ ausdrücken, daher heissen

die

die Bemühungen, dies Verhältniß zu bestimmen, auch Quadraturen des Kreises. Man hat dies Verhältniß in Zahlen überflüßig genau (465 §), und man könnte, wenn es nöthig wäre, die Näherung noch immer weiter treiben. Deswegen darf man es eben nicht für einen so sehr grossen Mangel der Theorie halten, daß man keine völlig genaue Quadratur des Kreises hat, oder das Verhältniß des Umfangs zum Durchmesser nicht durch ein paar bestimte Zahlen genau ausdrücken kan.

Man muß sich in unzehligen Fällen, wo die Theorie gar nicht mangelhaft ist, mit ähnlichen Näherungen in der Ausübung begnügen. So kan man häufig weder den Umfang noch die Fläche eines gradlinichten Dreyecks genau ausdrücken. Oft läst sich zwar der Umfang, aber nicht die Fläche, und umgekehrt, die Fläche, aber nicht der Umfang genau ausdrücken. Wenn im Dreyeck jede Seite = 1 ist, so ist der Umfang = 3, und die Fläche = $\frac{1}{2}$ sin 60°, wo sin 60° irrational ist, und wenn im rechtwinklichten Dreyeck, jeder Cathete = 1 ist, so ist der Inhalt = $\frac{1}{2}$, aber der Umfang = $2 + \sqrt{2}$. So wenig die Ausübung verliert, wenn man sich in diesen und ähnlichen Fällen mit Näherungen begnügt: so wenig verliert sie auch bey der nur durch Näherung bekanten Quadratur des Kreises.

Der XXI. Abschnitt.

Vergleichung des Inhalts der Figuren, die einen gleichen Umfang haben.

482 §.

182 F. Unter allen Parallelogrammen über einerley Grundlinie AC in eben der Höhe AG, hat das Rechteck den kleinsten Umfang und der Umfang der übrigen Parallelogrammen ist desto größer, je schiefer die Winkel werden. So wie hier aber gleiche Flächen einen sehr ungleichen Umfang haben; so können auch ungleiche Flächen durch einen gleichen Umfang begränzt seyn. Pappus Alexandrinus hat in seinen Collectionibus Math. im Anfange des V Buchs eine Vergleichung des Inhalts solcher Figuren, die einen gleichen Umfang haben, angestellt; und ich werde hier von dieser sehr sinreichen Theorie in folgenden Sätzen einen Auszug mittheilen.

483 §.

Ein Rechteck wird bey einerley Umfange desto größer, je weniger die Seiten von einander unterschieden sind. Und unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat das Quadrat die gröste Fläche.

Beweis. Es sey die Summe $a+b$ der Seiten a und b eines Rechtecks P so groß, als die Summe $f+g$ der Seiten eines andern Q: so haben beyde einerley Umfang. Aber aus $a+b=f+g$ folgt $b-g=f-a$.

$=f-a$. Wenn also $f \rhd a$ ist: so ist $b \rhd g$. Um nun den Inhalt beyder Rechtecke zu vergleichen, setze man $\frac{1}{2}(a+b)=s=\frac{1}{2}(f+g)$ und $\frac{1}{2}(a-b)=e$, ferner $\frac{1}{2}(f-g)=k$: so wird $a=s+e$, $b=s-e$, $f=s+k$, und $g=s-k$, also $P=a\times b=ss-ee$, und $Q=f\times g=ss-kk$. Wenn also $e \lhd k$, oder $a-b \lhd f-g$: so ist $P \rhd Q$. und wenn $a=b$, also $e=0$: so ist $P=ss$ allemahl größer, als Q, wie klein auch $f-g=k$ seyn mag.

484 §.

Ein Dreyeck wird bey einerley Umfang auf einer gegebenen Grundlinie desto größer, je weniger die übrigen beyden Seiten unterschieden sind; und unter allen Dreyecken von gleichem Umfang auf einerley Grundlinie, hat das gleichschenklichte die grösste Fläche.

Beweis. Wenn auf der Grundlinie a ein ungleichseitiges Dreyeck T stehet, dessen übrige Seiten b, und c sind: so ist $T=\frac{1}{4}\sqrt{((b+c)^2-aa)(aa-(b-c)^2)}$ (461 §). Setzt man auf eben der Grundlinie ein gleichschenklichtes Dreyeck V, das mit dem vorigen einerley Umfang hat, so, daß jeder von den gleichen Schenkeln $=f$, und $b+c=2f$ ist: so wird $V=\frac{1}{4}\sqrt{(4ff-aa)aa}$ (461 §). Da nun $(b+c)^2=4ff$: so ist $V \rhd T$ und T wird desto größer, je weniger b und c unterschieden sind.

485 §.

Das Product dreyer Größen a, b, c, die einerley Summe $a+b+c$ ausmachen, wird am grösten, wenn alle drey gleich groß sind.

Beweis. Wenn nemlich $b > a$, und $c > b$ ist: so sey $b = a+d$, und $c = a+e$, also wird das Product $abc = a^3 + aa(d+e) + ade$. Ferner ist $\frac{1}{3}(a+b+c) = a + \frac{1}{3}(d+e)$, und $(a+\frac{1}{3}(d+e))^3 = a^3 + aa(d+e) + \frac{1}{3}a(d+e)^2 + \frac{1}{27}(d+e)^3$. Aber der letzte Ausdruck ist größer, als der erste. Denn es ist $\frac{1}{3}a(d+e)^2 = \frac{1}{3}add + \frac{2}{3}ade + \frac{1}{3}aee = \frac{1}{3}add + ae(\frac{2}{3}d + \frac{1}{3}e)$ und $e > d$, also $\frac{2}{3}d + \frac{1}{3}e > d$, und $ae(\frac{2}{3}d + \frac{1}{3}e) > ade$.

486 §.

Unter allen Dreyecken von gleichen Umfange, hat das gleichseitige die gröste Fläche.

Beweis. Wenn a, b, c, die drey Seiten eines Dreyecks sind: so ist der Inhalt $= \frac{1}{4}r(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ (461 §), und wenn man $a+b+c = p$ setzt: so wird dieser Ausdruck $= \frac{1}{4}rp(p-2c)(p-2b)(p-2a)$. Wenn sich nun a, b, c, ändern, ohne daß sich ihre Summe ändert: so bleibt p einerley. Also auch die Summe der dreyen Factoren $p-2c+p-2b+p-2a = 3p-2(a+b+c) = p$. Daher ist dieses Product am grösten, wenn alle 3 Factoren gleich sind; folglich, wenn $2c = 2b = 2a$, oder, $c = b = a$, ist.

487 §.

Wenn α und β ein paar ungleiche Winkel sind, und es ist $\alpha > \beta$: so ist $\frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$.

Beweis. In der 186 F. sey der Winkel ACB $= \alpha$, und ACE $= \beta$: so ist $\frac{FG}{CF} = tang\,\alpha$; $\frac{FE}{CF} = tang\,\beta$, also $\frac{FG}{FE} = \frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta}$. Beschreibt man nun

nun mit dem Halbmesser CE = CA den Bogen AEB: so ist das Dreyeck FCE < Ausschnitt ACE, also $\frac{\text{Dr. ECG}}{\text{Dr. FCE}} > \frac{\text{Dr. ECG}}{\text{Ausch. ACE}}$, und weil wieder- um der Ausschnitt ECB < Dr. ECG; so ist auch $\frac{\text{Dr. ECG}}{\text{Dr. FCE}} > \frac{\text{Ausch. ECB}}{\text{Ausch. ACE}}$. Man addire 1 auf beyden Seiten: so wird $\frac{\text{ECG}+\text{FCE}}{\text{FCE}} > \frac{\text{ECB}+\text{ACE}}{\text{ACE}}$, oder $\frac{\text{FCG}}{\text{FCE}} > \frac{\text{ACB}}{\text{ACE}}$. Nun ist $\frac{\text{FCG}}{\text{FCE}} = \frac{\text{FG}}{\text{FE}}$ (245 §) $= \frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta}$, und $\frac{\text{ACB}}{\text{ACE}} = \frac{\alpha}{\beta}$ (253 §); also $\frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$.

488 §.

Ein reguläres Polygon, das mehr Seiten hat, ist allemahl größer, als ein andres, von weniger Seiten, wenn beyde einen gleichen Umfang haben.

Beweis. Wenn ein reguläres Polygon P, n Seiten hat; und jede Seite $= a$; der halbe Centriwinkel $= \alpha$ ist: so ist $P = \frac{1}{4} n\,aa \cot \alpha = \frac{na}{4} \cdot \frac{a}{tang\,\alpha}$ (462 §). Wenn ferner ein andres Polygon $(n+m)$ Seiten hat, und jede Seite $= b$; der halbe Centri-Winkel $= \beta$ ist; beyde Polygone aber einen gleichen Umfang haben: so ist $Q = \frac{1}{4}(n+m)\,bb \cot \beta$

$\cot\beta = \frac{(n+m)b}{4} \cdot \frac{b}{tang\,\beta} = \frac{na}{4} \cdot \frac{b}{tang\,\beta}$,

weil $(n+m)b = na$. Ueberdem ist $\alpha = \frac{180°}{n}$,

und $\beta = \frac{180°}{n+m}$, also $\alpha : \beta = n+m : n$, und $\alpha > \beta$.

Aber auch $a : b = n+m : n$; also $a : b = \alpha : \beta$. Nun war $\frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$ (487 §); also $\frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta} > \frac{a}{b}$, und $\frac{b}{tang\,\beta} > \frac{a}{tang\,\alpha}$, folglich $\frac{na}{4} \cdot \frac{b}{tg.\,\beta} > \frac{na}{4} \cdot \frac{a}{tang\,\alpha}$, d. i. $Q > P$.

489 §.

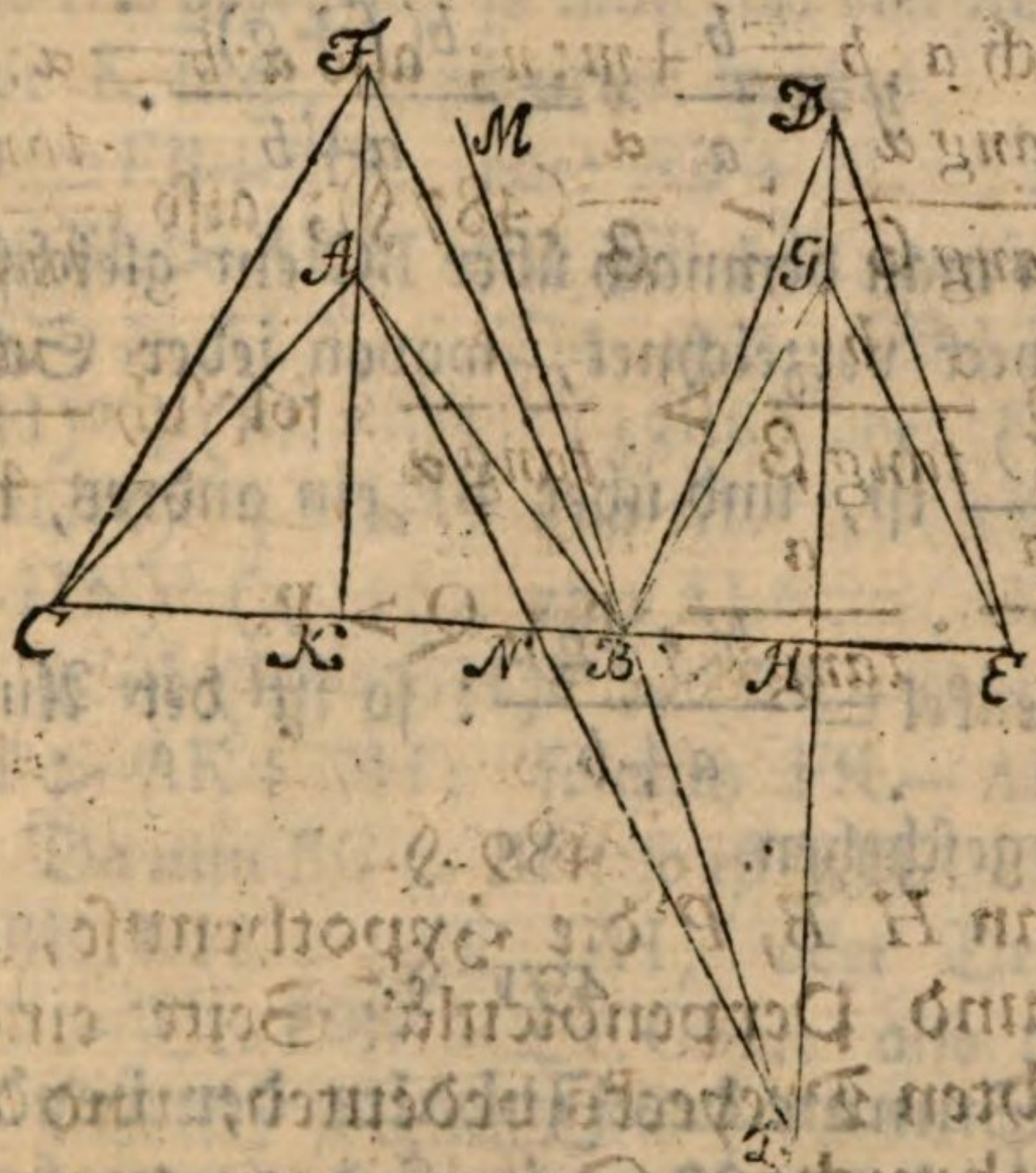
Wenn H, B, P die Hypothenuse, Grundlinie, und Perpendiculär-Seite eines rechtwinklichten Dreyecks bedeuten, und h, b, p die gleichnahmichten Seiten eines andern ähnlichen Dreyecks: so ist $(H+h)^2 = (B+b)^2 + (P+p)^2$.

Beweis. Es sey $B = nb$: so ist $P = np$, und $H = nh$. Aber $H^2 = B^2 + P^2$, oder $H^2 = n^2b^2 + n\,p^2$, und $h^2 = b^2 + p^2$; also $H = nh = n\sqrt{(b^2+p^2)}$, und $h = \sqrt{(b^2+p^2)}$. Nun ist $(H+h)^2 = H^2 + 2Hh + h^2 = H^2 + 2n(b^2+p^2) + h^2$, und $2nb^2 = 2Bb$, $2np^2 = 2Pp$, also $(H+h)^2 = B^2 + P^2 + 2Bb + 2Pp + b^2 + p^2 = (B+b)^2 + (P+p)^2$,

490 §.

Auf den Grundlinien BC und BE stehen zwo einander unähnliche gleichschenklichte Drey-

Dreyecke *ABC*, *DBE*: man soll auf eben die Grundlinien ein paar einander ähnliche gleichschenklichte Dreyecke setzen, die so beschaffen sind, daß beyder Umfang zusammen so groß ist, als der beyden gegebenen *ABC* und *DBE* Umfang zusammen.



Aufl. Man setze daß FBC und GBE die gesuchten Dreyecke sind: so muß FCB = GBE seyn. Ist also ACB < DBE: so wird FCB > ACB, und GBE < DBE. Nun sey BC = a, BE = b, AC = f, DB = g, FC = x, GB = y: so hat man

I) $f+g=x+y$.

Ueberdem wegen der Aehnlichkeit der beyden gesuchten Dreyecke $a:b=x:y$, also

II) $ay=bx$.

Aus beyden Gleichungen findet man nach dem 184§ und 186§, x und y. Man erhält nemlich aus

II) $y = \frac{bx}{a}$; und aus I) $f+g = x + \frac{bx}{a}$, also $a(f+g) = x(a+b)$ und

$$x = \frac{a(f+g)}{a+b}$$

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{b(f+g)}{a+b}.$$

Wenn man demnach über BC ein gleichschenklichtes Dreyeck verzeichnet, wovon jeder Schenkel $= \frac{a(f+g)}{a+b}$ ist, und über BE ein andres, wovon jeder Schenkel $= \frac{b(f+g)}{a+b}$: so ist der Aufgabe ein Genüge geschehen.

491 §.

Die Summe des Inhalts der beyden ähnlichen, nach der Vorschrift des vor. § verzeichneten gleichschenklichten Dreyecke *FBC*, *GBE*, ist größer, als die Summe des Inhalts der beyden andern *ABC*, *DBE* auf eben den Grundlinien, wenn die beyden letzten zusammen einen eben so grossen Umfang haben, als die beyden ersten zusammen.

Beweis. Man verzeichne die Dreyecke ABC, DBE so, daß ihre Grundlinien BC, BE in grader Linie liegen, und setze AK und DH auf BC und BE senkrecht. Wenn nun FBC, GBE die beyden ähnlichen Dreyecke, auf eben den Grundlinien sind: so geht AK durch F, und DH durch G. Wenn ferner

BE

BE die kleinere Grundlinie ist: so verlängere man DH nach L, und mache HL = HD, ziehe BL: so ist der Winkel HBL = HBD. Aber HBD > HBG, also HBL > HBG; folglich auch HBL > KBF, und wenn man LD nach M verlängert: so wird KBM > KBF, folglich auch KBM > KBA; folglich ABL < 2R. Wird also AL gezogen: so muß AL von BC auf der Seite, wo K liegt, geschnitten werden. Nun ist AB + BD = FB + BG; oder AB + BL = FB + BG, und AB + BL > AL, also FB + BG > AL, und $(FB+BG)^2 > AL^2$. Da nun $(FB+BG)^2 = (FK+GH)^2 + (BK+BH)^2$ (489§), oder $(FB+BG)^2 = (FK+GH)^2 + HK^2$, und $AL^2 = (AK+HL)^2 + (KN+HN)^2$ (489§), oder $AL^2 = (AK+DH)^2 + HK^2$: so ist $(FK+GH)^2 > (AK+DH)^2$, und FK + GH > AK + DH; folglich FK − AK > DH − GH. Da nun BC > BE: so ist $\frac{1}{2}$BC.FK − $\frac{1}{2}$BC.AK > $\frac{1}{2}$BE.DH − $\frac{1}{2}$BE.GH, oder Dr. FBC − Dr. ABC > Dr. DBE − Dr. GBE; also die Figur ABFC > GEDB; folglich ABC + ABFC + GBE > ABC + GEDB + GBE, d. i. FBC + GBE > ABC + DBE.

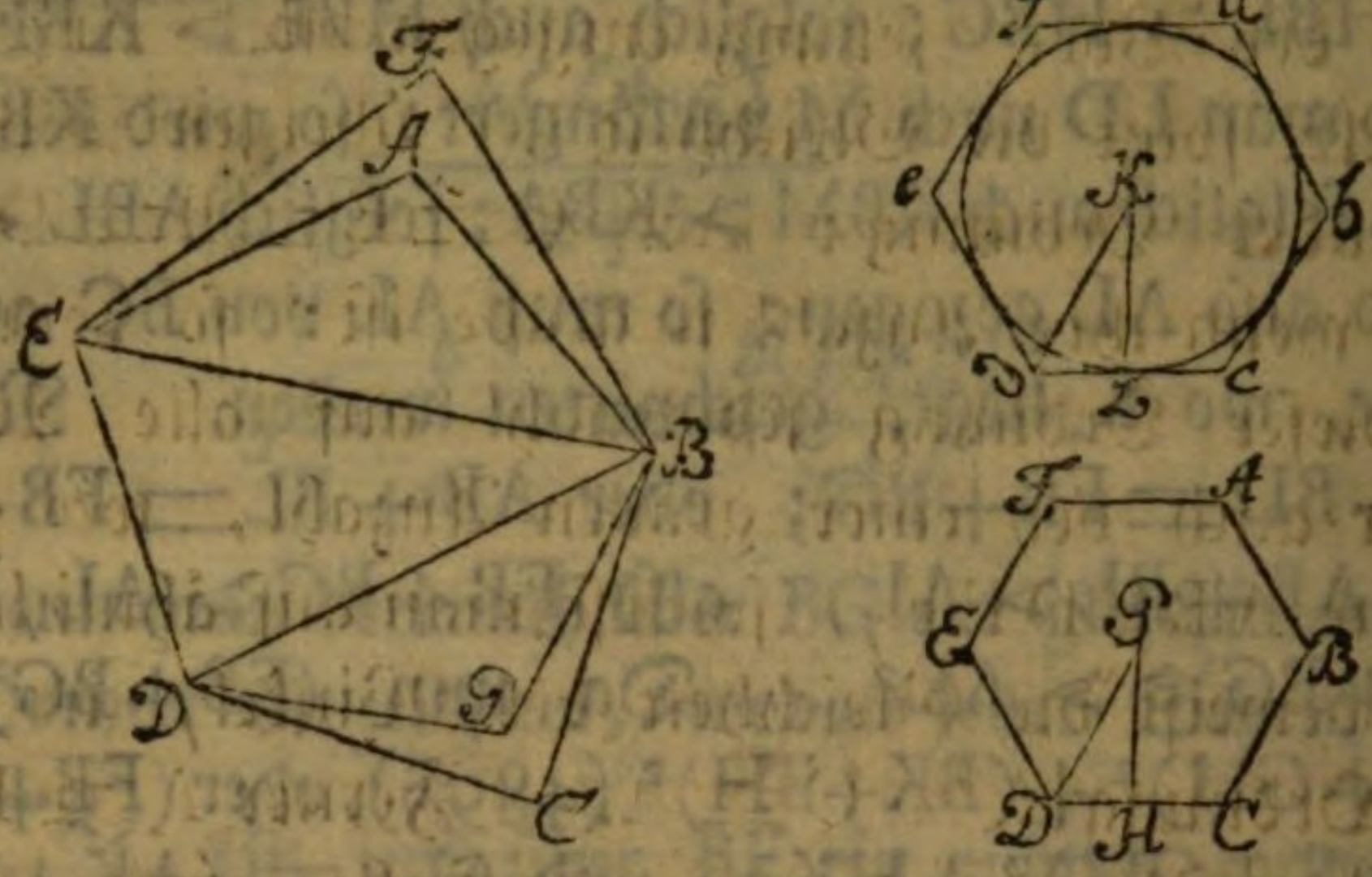
Wenn BC = BE wäre; oder beyde Dreyecke gleiche Grundlinien hätten: so würde derselbe Satz noch richtig seyn.

492 §.

Unter allen gradlinichten Figuren, die gleich viel Seiten, und einen gleichen Umfang haben, hat die reguläre Figur die gröste Fläche.

Beweis. Wenn die Figuren Dreyecke sind: so ist der Satz schon im 486 § bewiesen. Für die übrigen

gen kan man so schliessen. Es sey die Figur ABCDE unter allen Figuren die eben so viel Seiten, und



einen eben so grossen Umfang haben, die gröste: so ist sie

1) gleichseitig. Denn wäre AB nicht = AE: so könte man auf BE ein gleichschenklichtes Dreyeck BFE mit ABE von gleichem Umfange setzen, und dann wäre BFE > ABE (484 §), folglich wäre die Figur FBCDE > ABCDE, die mit ihr eine gleiche Anzahl Seiten, und einerley Umfang hat; gegen die Voraussetzung. Eben so erhellet, daß jede zwo an einander liegende Seiten gleich groß seyn müssen.

2) gleichwinklicht. Es muß nemlich vermöge des erwiesenen AB = BC = CD, u. s. f. seyn; aber es ist auch EAB = BCD. Denn wären diese Winkel ungleich: so könte man auf EB und BD ein paar ähnliche gleichschenklichte Dreyecke BFE und BGD setzen, von der Beschaffenheit, daß beyder Umfang zusammen so groß wäre, als beyder Drey-

eck

ecke BAE und BCD Umfang zusammen (490 §). Dann aber wäre die Figur FBGDE > ABCDE, und beyde hätten einerley Umfang, welches ebenfalls der Voraussetzung entgegen ist. Auf ähnliche Art folgt die Gleichheit der übrigen Winkel in folgender Ordnung: A = C = E = B = D = A, und wenn ihre Anzahl ungrade ist: so komt man in dieser Ordnung jedesmahl auf alle Winkel. Aber auch bey einer graden Anzahl, wie in der Figur ABCDEF, schliest man auf ähnliche Art, und beweist die Gleichheit der Winkel, in folgender Ordnung A = C = E. Ferner A = D = F = B. Nur in dem einen Falle, wenn die Figur vierseitig ist, würde auf diese Art nur folgen, daß die entgegen gesetzten Winkel gleich wären. Aber in diesem Falle ergiebt sich die Sache so: die Figur muß gleichseitig seyn vermöge No. 1. Also ist sie ein gleichseitiges Parallelogramm (98 §). Wenn nun jede Seite = a, und der Winkel, den zwo aneinander anliegende Seiten, einschliessen, = α ist: so wird der Inhalt = $aa \sin \alpha$ (460 §), und dieser ist allemahl kleiner, als aa, welches der Inhalt in dem Falle wird, wenn $\alpha = 90°$ ist, und in diesem Falle ist die Figur ein Quadrat; also regulär.

493 §.

Der Kreis hat eine gröſsere Fläche, als eine jede gradlinichte Figur, die mit ihm einen gleichen Umfang hat.

Beweis. Es sey ABCDEF ein reguläres Polygon (man sehe die Figur zum vor. §), so mit

dem

dem Kreise, dessen Mittelpunct K ist, einerley Umfang $= \pi$ hat: um diesen Kreis sey ein ähnliches Polygon *abcdef* beschrieben, dessen Umfang $= P$ ist; so ist $P > \pi$ (144 §). Folglich ist auch jede Seite dieses um den Kreis beschriebenen Polygons größer, als jede Seite des andern. Es sey G der Mittelpunct des um ABCDEF zu beschreibenden Kreises, und GH auf CD, so wie KL auf *cd* senkrecht: so ist $dL = \frac{1}{2} cd$ und $DH = \frac{1}{2}$CD. Wenn nun K*d* und GD gezogen werden: so ist das Dreyeck K*d*L $\sim$ GDH; folglich KL $>$ GH, weil *d*L $>$ DH. Nun ist der Inhalt des Kreises $= \frac{1}{2}\pi$.KL, und des Polygons ABCDEF Inhalt $= \frac{1}{2}\pi$.GH; folglich die Fläche des Kreises größer, als die Fläche des Polygons ABCDEF. Weil nun das letztere größer ist, als jede andre gradlinichte Figur von gleichem Umfange (492 §): so ist auch der Kreis größer, als jede gradlinichte Figur, die mit ihm einerley Umfang hat.

Weitere Ausführung der körperlichen Geometrie.

Der XXII. Abschnitt.

Von den Kugel-Schnitten.

494 §.

Wenn zweene Kreise *ABDE*, *AFBG* auf der Kugel Oberfläche einander schneiden: so giebt es nur zweene Durchschnittspuncte. 194 F.

Beweis. Die Durchschnittspuncte müssen in den Ebenen beyder Kreise, folglich in der graden Linie AB liegen, worin die Ebenen beyder Kreise einander schneiden. Eben diese Puncte müssen zugleich in der Kugel Oberfläche liegen. Folglich giebt es nur zweene solche Puncte, weil AB die Oberfläche der Kugel, nur in zweenen Puncten treffen kan (379 §), und AB eine gemeinschaftliche Sehne beyder Kreise ist.

Zweene gröste Kreise schneiden einander allemahl, weil ihre Ebenen durch der Kugel Mittelpunct gehen. Eben diese Kreise halbiren einander. Denn die Sehne zwischen beyden Durchschnittspuncten ist ihrer beyder Durchmesser (384 §).

Umgekehrt: Zweene Kreise, die einander halbiren, sind gröste Kreise. Denn die Sehne zwischen ihren Durchschnittspuncten, ist ihrer beyder Durchmesser (384 §), und geht also durch beyder Mittelpunct.

punct. Wäre dies nun nicht zugleich der Kugel Mittelpunct: so würde eine grade Linie von der Kugel Mittelpunct durch den gemeinschaftlichen Mittelpunct beyder Kreise gezogen, auf beyder Ebenen senkrecht seyn (384 §), welches nicht angehet (322 §)

Ein paar Kreise der Kugel also, die nicht beyde gröste Kreise sind, können einander nicht halbiren.

495 §.

194 F. Ein Punct P, auf der Kugel Oberfläche, der von allen Puncten des Umfangs AGBF eines Kreises der Kugel gleichweit entfernt ist, heist ein **Pol** dieses Kreises.

Wenn eine grade Linie *PQ* durch des Kreises *AGBF* Mittelpunct auf seiner Ebene senkrecht stehet; so sind die Puncte *P* und *Q*, worin sie die Kugelfläche trift, des Kreises *AEBF* Pole.

Auch umgekehrt: Wenn *P* des Kreises *AGBF* Pol ist, und es fällt von *P* auf die Ebene *AGBF* die lothrechte Linie *PK*: so geht sie durch des Kreises *AGBF* Mittelpunct, und trift die Oberfläche der Kugel in einem andern Punct Q, der ebenfalls des Kreises *AGBF* Pol ist.

Beweis des 1 §. Wenn A, F, B, G u.s.f. Puncte in des Kreises AFBG Umfang sind: so ziehe man AK, FK u.s.f., imgleichen AP, AQ, FP, FQ u.s.f.: so fällt gleich in die Augen, daß die Dreyecke APK, FPK u.s.f., imgleichen AQK, FQK u.s.f.

auf

auf einander passen (54 §), und also AP=FP=BP=GP u. s. f., imgleichen AQ=FQ=BQ=GQ, u. s. f. sey.

Beweis d. 2 S. Umgekehrt, wenn AP=FP=BP=GP u. s. f. seyn soll, und PK steht auf AFBG lothrecht: so haben die rechtwinklichten Dreyecke um PK zwo gleiche Seiten, also müssen auch die übrigen gleich seyn, und es wird AK=FK=BK=GK u. s. f. (78 §). Folglich geht das Loth PK durch den Mittelpunct K, und aus dem vorigen Beweise erhellet, daß auch Q ein Pol des Kreises AFBG sey.

Demnach hat jeder Kreis der Kugel zweene Pole, die auf entgegengesetzten Seiten der Ebene dieses Kreises liegen, und nicht mehrere. Denn sonst könten durch K auf der Ebene AFBG mehr, als eine Linie senkrecht seyn, gegen den 305 §.

496 §.

Eine grade Linie PQ zwischen den beyden Polen P und Q eines Kreises AFBG der Kugel, heist die Axe dieses Kreises. 198

Die Axe PQ des Kreises AFBG geht durch seinen Mittelpunct K, steht auf seiner Ebene senkrecht, und geht also durch der Kugel Mittelpunct (384 §). Denn eine senkrechte Linie durch K, geht durch P und Q (495 §), und zwischen diesen beyden Puncten fällt nur eine grade Linie.

Ein Kreis ABDE der auf der Kugel durch eines andern Kreises AFBG Pole gehet, steht auf dem letztern senkrecht, denn er geht durch die Axe PQ des Kreises AFBG (315 §). Auch halbirt ABDE den andern Kreis AFBG, weil die Durchschnittslinie AB durch des letztern Mittelpunct K gehet. Ueberdem

ist ABDE ein gröster Kreis, weil der Kugel Mittelpunct in PQ, und also in dieses Kreises Ebene liegt: auch sind die Bogen AP, BP, imgleichen AQ, BQ dieses gröstes Kreises, zwischen dem Kreise AFBG, und einerley Pol desselben, gleich groß, weil ihre Sehnen gleich groß sind.

Geht durch die Pole P, Q eben des Kreises AFBG noch ein andrer gröster Kreis: so sind aus eben der Ursache die Bogen AP, FP, BP, GP, auch AQ, FQ, BQ, GQ gleich groß.

Wenn ein gröster Kreis ABDE auf einem andern Kreise AFBG der Kugel senkrecht steht: so fällt die lothrechte Linie CK von C auf des Kreises AFBG Ebene in des gröstes Kreises Ebene (318 §). Also gehet der gröste Kreis durch des andern Axe, und Pole, und halbirt ihn.

Wenn ein gröster Kreis ABDE einen andern AFBG halbirt: so geht er durch seinen Mittelpunct K, aber auch durch der Kugel Mittelpunct C, folglich geht er durch die Axe PQ, und Pole des Kreises AFBG, und steht auf ihm senkrecht.

Wenn demnach ein gröster Kreis einen andern schief schneidet, so halbirt er ihn nicht; denn wäre das letztere: so würde er auf ihn senkrecht stehen.

195 F. Steht ein gröster Kreis APBQ auf einem andern gröstes Kreise *ApBq* senkrecht: so geht jeder durch des andern Axe und Pole. Die Axe PQ des einen *ApBq* fällt in die Ebene des andern APBQ, so wie des letztern Axe *pq* in die Ebene des erstern fällt (318 §). Die Bogen AP, BP eines jeden dieser gröstes Kreise zwischen dem andern Kreise und seinem Pol, sind Quadranten (116 §).

Wenn

Wenn AFBG, DFEG zweene Kreise der Kugel sind, die einander in FG schneiden, und ein gröster Kreis APBQ der durch die Pole P, π, der beyden vorigen geht, schneidet den einen in AB, den andern in DE: so ist FE=EG, FD=DG, FA=AG, FB=BG. Denn weil beyde Ebenen AFBG, DFEG auf der Ebene APBQ senkrecht sind: so ist jene Durchschnittslinie FG auf der Ebene APBQ, folglich sowohl auf AB, des Kreises AFBG, als auch DE, des Kreises DFEG Durchmesser senkrecht (319 §). Demnach werden die Bogen FEG, FDG von DE, ingleichen FAG, FBG von AB halbirt (117 §).

497 §.

Kreise der Kugel, deren Ebene einander parallel liegen, heissen Parallel-Kreise.

Parallelkreise DE, FG haben einerley Axe und Pole. Denn eine lothrechte Linie CH aus der Kugel Mittelpunct C auf die Fläche des einen, geht durch seinen Mittelpunct H, und Pole, P, Q (383. 495 §). Eben diese lothrechte Linie steht zugleich senkrecht auf der Ebene des andern DE (326 §). Sie geht demnach durch seinen Mittelpunct (383 §), und ist also zugleich des Kreises DE Axe (495 §), und ihre Endpuncte P, Q sind beyder Kreise Pole.

498 §.

Wenn zweene gröste Kreise *APBQ*, *LPOQ* 196 durch die Pole *P*, *Q* der Parallelkreise *DE*, *FG* F. geführt sind: so sind die Bogen *DM*, *FN*, der Parallelkreise zwischen diesen grösten Kreisen einander ähnlich.

Beweis. Wenn die Parallelkreise von den grösten Kreisen in den Linien DK, MK, FH, NH geschnitten werden: so sind PKD, PKM, PHF, PHN, rechte Winkel (496 §). Also ist DKM sowohl, als FHN der Neigungswinkel der Ebene PLQ gegen PAQ (313 §), und deswegen ist DKM = FHN, und der Bogen DM ∽ FN (225 §).

Theilt man demnach die Parallelkreise in ihre 360 Grade: so bekommen die Bogen DM, FN eine gleiche Anzahl von Graden. Deswegen ist der Bogen DM, oder auch ein ähnlicher Bogen eines andern, mit DE parallelen Kreises das Maaß des Flächenwinkels, den die beyden grösten Kreise einschliessen.

Einer von den, mit DE parallelen Kreisen wird durch der Kugel Mittelpunct C gehen, und selbst ein gröster Kreis seyn, wie AB, also ist der Bogen AL dieses Kreises das Maaß des Flächen Winkels an PQ, der mit ALC einerley ist. Man wählet am bequemsten diesen Bogen, weil er zu einem Halbmesser gehört, der dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

499 §.

196 F. Der Winkel DPM, den zweene Bogen DP, MP gröster Kreise auf der Oberfläche der Kugel an der Spitze P einschliessen, heist ein sphärischer Winkel.

Wenn P*d* in der Ebene APQ den Kreisbogen DP, und P*m* in der Ebene LPQ den Bogen MP berührt: so haben die Tangenten die Bogen gegeneinander, welche beyde Bogen DP, MP, in ihrem Durchschnittspunct P gegen einander haben (132. 133 §). Daher ist der sphärische Winkel DPM mit dem Winkel dieser Tangenten *d*P*m* einerley.

Es ist aber auch dPm mit dem Neigungswinkel der Ebenen DPQ, und MPQ einerley. Also wird das Maaß des sphärischen Winkels DPM eben so, wie das Maaß dieses Neigungswinkels, gefunden. Man nehme nemlich auf den Schenkeln PD und PM des sphärischen Winkels, die Bogen PA, und PL = 90°, und lege durch die drey Puncte, A, L, C eine Ebene. Diese wird auf PQ senkrecht seyn (305 §), und einen grösten Kreis AB geben, wovon der Bogen AL zwischen den Schenkeln des sphärischen Winkels DPM, dieses Winkels Maaß für den Halbmesser der Kugel abgiebt.

Nimt man demnach auf dem einen Schenkel PL des sphärischen Winkels APL den Bogen PL = 90°, und legt durch CL eine Ebene LCA auf der Ebene des andern Schenkels PA senkrecht: so wird auch PA = 90°. Denn ein Loth LR auf die Ebene PA, fällt in die Ebene LCA (318 §), also liegt R in dem Durchschnitt AC. Weil nun LCP = 90°: so ist RCP = 90° (314 §), und folglich auch PA = 90°.

Auch umgekehrt: Wenn PA = 90°, und die Ebene ACL auf der Ebene AP senkrecht ist: so muß PL = 90° seyn. Denn das Loth LR geht durch AC (318 §), und weil RCP = 90° ist: so ist LCP = 90° (314 §) also PL = 90°.

500 §.

Wenn zweene gröste Kreise der Kugel einander in *F* und *G* schneiden: so ist der sphärische Winkel *EGB*, oder der Neigungswinkel der Ebenen beyder Kreise, so groß, als der Winkel $PC\pi$, den die Axen PC, πC beyder Kreise einschliessen. 197 F.

Beweis.

Beweis. Man nehme GE = 90° = GB, und lege durch B und E einen grösten Kreis. Weil dieser auf beyde vorige senkrecht steht (315 §): so gehet er durch beyder Axen PC und πC (496 §). Weil nun PCB = 90° = πCE: so wird ECB = PCB — PCE = πCE — PCE, oder ECB = πCP. Aber ECB ist mit dem sphärischen Winkel EGB einerley (499 §).

Demnach ist auch der Bogen Pπ = dem Bogen EB.

501 §.

Der kleinste Bogen eines grösten Kreises Pπ zwischen zweenen Puncten auf der Oberfläche der Kugel heist der Abstand, oder die Entfernung des einen Puncts P vom andern π auf der Oberfläche der Kugel genommen. Es ist nemlich dieser Bogen die kürzeste Linie, die man von P nach π auf der Oberfläche der Kugel ziehen kan.

Weil zwischen eben den Puncten P und π zweene unterschiedene Bogen Pπ, und PBDπ eben desselben grösten Kreises fallen, so war es nöthig, beyzufügen, daß von diesen beyden Bogen der kleinste Pπ, der also allemahl kleiner, als ein Halbkreis ist, verstanden werden müsse.

Demnach ist der Abstand der Pole zweener grösten Kreise auf der Oberfläche der Kugel so groß, als das Maaß des sphärischen Winkels beyder Kreise für den Halbmesser der Kugel.

Jeder Pol eines grösten Kreises ist von allen Puncten dieses Kreises um 90° entfernt.

502 §.

Ein paar Kreise auf der Oberfläche der Kugel berühren einander, wenn zwar ihre Peripherien

zusam-

zusammen stossen, aber so, daß der eine ganz auf der einen Seite der Ebene des andern fällt.

Zweene solche Kreise können sich nur in einem Punct berühren. Hätten ihre Peripherien nur zweene Puncte gemein; so wäre die grade Linie zwischen diesen Puncten, ihre gemeinschaftliche Sehne, und diese würde jede Kreisfläche in zwey Stücke schneiden, die zu beyden Seiten der andern Kreisfläche fallen würden.

503 §.

Durch einen Punct *B* eines Kreises *AB* der Kugel, einen andern zu führen, der den vorigen berührt. 198 F.

Aufl. Man lege einen grösten Kreis ABD durch des Kreises AB Pole: so schneiden beyde einander in der graden Linie AB, und AB ist des Kreises AMBN Durchmesser. Durch B sey die grade Linie GH auf des grösten Kreises Ebene senkrecht gesetzt: so fällt diese in die Ebene des Kreises AMBN (318 §), und berührt diesen Kreis (126 §). Durch HG lege man eine neue Ebene, welche die Kugel schneidet, diese giebt einen Kreis BD, der ebenfalls auf ABD senkrecht steht, und ihn in BD schneidet, so daß BD sein Durchmesser ist (499 §). Da nun HBD = R: so ist HG auch eine Tangente des Kreises BRDS. Demnach fällt dieser Kreis ganz auf der einen Seite der Fläche des Kreises AMBN, und berühret denselben in B.

Man kan also durch eben denselben Punct B unzehlig viele Kreise legen, die alle den Kreis AMBN in B berühren. Unter diesen aber kan nur einer ein gröster Kreis seyn.

Der XXIII. Abschnitt.

Von den körperlichen Winkeln, oder Ecken.

504 §.

199 F. Wenn drey, oder auch mehr gradlinichte Winkel ACB, BCD, DCA so aneinander liegen, daß ihre Spitzen bey C in einen Punct zusammen fallen, und jeder Winkel mit dem anliegenden einen Schenkel gemein hat; übrigens aber die Ebenen dieser Winkel sich in den graden Linien schneiden, welche die gemeinschaftlichen Schenkel zweener an einander liegender Winkel, abgeben: so heist der zwar bey C rings herum begränzte, aber gegen A, B, D zu noch unbegränzte Raum, ein **körperlicher Winkel**, oder eine **Ecke**.

Die Winkel ACB, BCD, u. s. f., welche die Ecke einschliessen, heissen die **Seitenflächen der Ecke**; die Flächen-Winkel an AC, AB u. s. f. aber, unter welchen die Seitenflächen gegen einander geneigt sind, die **Winkel der Ecke**.

Es giebt also **dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Ecken**, u. s. f., weil sie den Nahmen von der Anzahl ihrer Seitenflächen bekommen. Eine dreyseitige Ecke heist auch ein **Solides**, oder **körperliches Dreyeck**.

505 §.

203 F. Wenn A, B, D, drey Puncte auf der Oberfläche einer Kugel sind, deren Mittelpunct C ist, und diese

drey

drey Puncte liegen nicht in einem und eben demselben grösten Kreise der Kugel: so kan man zwischen zweenen B und D einen Bogen BD eines grösten Kreises, und von beyden Endpuncten dieses Bogens nach dem dritten Punct A ebenfalls ein paar Bogen AD, AB gröster Kreise ziehen. Das Stück der Oberfläche der Kugel, welches von diesen dreyen Bogen AD, AB, BD begränzt wird, heist ein sphärisches Dreyeck. Die Bogen selbst, heissen die Seiten dieses Dreyecks, und die sphärischen Winkel an A, B, und D die Winkel desselben.

Man ziehe die drey Halbmesser der Kugel AC, BC, DC: so schliessen die Ebenen der dreyen Kreisausschnitte ACB, ACD, BCD an der Kugel Mittelpunct C ein solides Dreyeck ein (504 §). Die Winkel des sphärischen Dreyecks ABD sind völlig einerley mit den Winkeln des soliden Dreyecks an C, und die Bogen des sphärischen Dreyecks sind die Maasse der Seitenflächen des soliden Dreyecks. Will man also die Seiten des sphärischen Dreyecks nur in Graden kennen: so sind die Seiten und Winkel des sphärischen Dreyecks bekant, wenn man die Seitenflächen und Winkel des soliden Dreyecks kennet, und umgekehrt.

Deswegen kan man sich jedes solide Dreyeck zugleich als ein sphärisches, und umgekehrt, jedes sphärische als ein solides Dreyeck vorstellen. Dies dienet ungemein zu desto besserer Aufklärung der folgenden Lehren von diesen Dreyecken, und macht die Zeichnungen deutlicher.

506 §.

199 F. Wenn im sphärischen Dreyeck ABD eine Seite BD kleiner, als 180° ist: so ist auch der gegenüberstehende Winkel $BAD < 180°$, und wenn $BD > 180°$ ist: so wird auch $BAD > 180°$.

Eben diese Sätze sind auch umgekehrt wahr.

Beweis. Es sey der Bogen BDE = 180°: so geht BA verlängert durch E, und es wird auch BAE = 180° (494 §). So lange nun BD < 180° ist, hat man BAD + DAE = 180°, also BAD < 180°. Fällt D über E hinaus in F, so daß BF > 180° ist: so wird auch BAF > 180°, weil BAE = 180° ist.

Wenn die Seite BDF > 180° ist, und man macht den Kreis, wozu dieser Bogen gehört, vollständig: so entsteht ein neues sphärisches Dreyeck, welches mit dem vorigen die Seiten AD, AF gemein hat, und worin die dritte Seite BF die Seite BDF des vorigen zu 360° ergänzt. Der Winkel, welcher der Seite FB in dem einen gegenüberstehet, ergänzt ebenfalls den Winkel, welcher der Seite BDF in dem andern gegenüber steht, zu 360°. Die an den gemeinschaftlichen Seiten AF, AB anliegenden Winkel ergänzen einander zu 180°. Man pflegte deswegen die sphärischen und soliden Dreyecke wohl ganz bey Seite zu setzen, worin eine Seite, und also auch ein Winkel größer, als 180° ist. Dies hat Euclides gethan; er hat auch bey den übrigen Ecken nie solche betrachtet, in welchen Winkel von mehr, als 180° vorkommen, so wie er auch in der ganzen Geometrie nur von solchen gradlinichten Winkeln redet, die kleiner, als 180° sind. Seine VIII Erklä-

rung im I Buch ist blos auf die hohlen Winkel eingeschränkt, und die Betrachtung der erhabenen Winkel ist eine Erweiterung dieser Lehre, welche neuere Theorien veranlasset haben. Dieses einzigen Umstandes wegen liesse sich Euclides gegen die sonst scharfsinnigen Erinnerungen noch wohl vertheidigen, welche ihm Herr Bärmann in seiner zu Wittenberg im Jahr 1764 herausgegebenen Commentatione de angulis solidis entgegengesetzt hat.

507 §.

Wenn im sphärischen Dreyeck *ABD* jeder Winkel $< 180°$ ist: so sind jede zweene Seiten zusammen gröſſer, als die dritte. 199 F.

Beweis. Ist jeder Winkel $< 180°$: so ist auch jede Seite $< 180°$. Wenn nun alle drey Seiten gleich groß sind: so ist der Satz für sich klar. Ist aber $BD < AD$, also der Winkel $BCD < ACD$: so ziehe man AD, und mache $DCG = DCB$, nehme $CH = CG$, und ziehe AH, DH. Nun ist $HD = GD$ (54 §), und $AH + HD > AG + GD$ (34 §). Folglich $AH > AG$. Demnach ist der Winkel $ACH > ACG$ (63 §). Und weil $HCD = GCD$ gemacht ist; so wird $ACH + HCD > ACG + GCD$; oder $ACH + HCD > ACD$, folglich auch die Bogen $AB + BD >$ Bog. AD.

508 §.

Wenn in einer körperlichen Ecke, deren Spitze *C* ist, jeder Winkel $< 180°$ ist: so ist auch jede Seitenfläche kleiner, als $180°$. 200 F.

Beweis. Wenn ACB, BCD ein paar an einander liegende Seitenflächen sind, die sich in CB schnei-

schneiden: so schliest die Ebene durch ACD mit den vorigen beyden eine dreyseitige Ecke ein, und die Flächen-Winkel an AC und CD werden kleiner, als 180°, weil die Ebene ACD in den körperlichen Raum der Ecke fällt. Demnach sind auch ACB, und BCD < 180° (506 §). So gilt der Beweis von jeden zwoen aneinander liegenden Seitenflächen; also von allen.

509 §.

Ist jeder Winkel einer körperlichen Ecke kleiner, als 180°: so beträgt die Summe aller Seitenflächen weniger, als 4*R*, oder weniger, als 360°.

200 F. Beweis. Man kan eine Ebene ABDE so legen, daß sie alle Seitenflächen der Ecke schneidet. Denn man kan durch die Spitze C eine Ebene so legen, daß alle Seitenlinien der Ecke an einer Seite dieser Ebene fallen. Diese schneidet alle Seitenlinien, also wird jede Ebene, die mit dieser parallel liegt, ebenfalls alle Seitenlinien (326 §), folglich alle Seitenflächen der Ecke schneiden. Auf solche Art schliessen die Durchschnittslinien eine ebene gradlinichte Figur ABDE ein, die eben so viel Seitenlinien hat, als die Ecke Seitenflächen.

Jeder von den Winkeln dieser Figur, bey A, B, C, D ist kleiner, als 2R. Denn jeder dieser Winkel, wie der bey A schliest mit zwoen durch AC liegenden Seitenflächen der Ecke C ein solides Dreyeck ein, worin der Winkel an AC < 2R ist, also ist auch BAE < 2R (506 §). Nimt man einen Punct F innerhalb dieser Figur, und zieht nach alle Winkelpuncte A, B, D u. s. f. grade Linien FA, FB, u. s. f.

so

so erhält man in derselben so viel Dreyecke, als die Figur Seitenflächen hat. Demnach ist die Summe aller Winkel der Dreyecke um F so groß, als die Summe aller Winkel der Dreyecke um C (87 §), weil um C eben so viele Dreyecke, als um F liegen. Man verstehe nun durch A, B, C, D die Winkel der ebenen Figur ABCD, durch a, α, die zu den Dreyecken um C gehörigen Winkel bey A, durch b, β die bey B, eben so durch d, δ, die bey D, und durch e, ε, die bey E liegenden Winkel der Dreyecke um C: so hat man

$a+\alpha+b+\beta+d+\delta+e+\varepsilon+$ die W. um C $=A+B+C+D+4R$

weil die Winkel um F $=4R$ (24 §). Aber $a+\alpha > A$, $b+\beta > B$ u. s. f. (507 §). Also $a+\alpha+b+\beta+d+\delta+e+\varepsilon > A+B+C+D$, folglich sind die Winkel um C kleiner als 4R (28 §. R.)

510 §.

Wenn man die drey Seitenlinien *AC*, *BC*, *DC* des dem sphärischen Dreyeck *ABC* zugehörigen soliden Dreyecks, an der Kugel Mittelpunct C durch C verlängert, bis sie die Oberfläche der Kugel in *a*, *b*, *d* wieder treffen: so schliessen die drey Bogen gröster Kreise zwischen *a*, *b*, und *d* ein sphärisches Dreyeck ein, dessen Seiten und Winkel den Seiten und Winkeln des vorigen *ABD* gleich sind, so daß die gleichen Seiten den gleichen Winkeln gegenüber stehen. 201 F.

Beweis. Daß die Bogen $AB=ab$, $AD=ad$, $BD=bd$ sind, erhellet aus dem 27 und 116 §. Ueberdem sind ADB und *adb*, DAB und *dab*, ABD

und

und *abd* entgegengesetzte gleich grosse Flächenwinkel (27 §).

511 §.

201 Wenn zwo sphärische Dreyecke $ABD - \alpha\beta\delta$
202 auf einer, oder gleich grossen Kugeln einen
203 gleichen Winkel haben $D = \delta$, und zwo gleiche
F. Seiten, die den gleichen Winkel einschliessen
$AD = \alpha\delta$, $DB = \delta\beta$: so sind die übrigen den gleichen Seiten gegenüber stehenden Winkel, wie auch die übrigen Seiten gleich groß.

Beweis. Es sey γ die Spitze des dem sphärischen Dreyeck $\alpha\beta\delta$ zugehörigen soliden Dreyecks an der Kugel Mittelpunct, deren Halbmesser bey dieser Untersuchung für alle sphärische Dreyecke einerley bleibt. Man lege die Seitenfläche $\beta\gamma\delta$ so auf BCD daß γ in C, $\gamma\delta$ in CD falle, so fällt δ in D, $\gamma\beta$ in CB, und $\beta\delta$ in BD.

201 Nun fällt entweder die Seitenfläche $\alpha\gamma\delta$ über BCD,
202 oder unter BCD. Im ersten Fall fällt $\alpha\gamma\delta$ mit
F. ACD zusammen (317 §) $\gamma\alpha$ fällt in CA, α in A, $\delta\alpha$ in DA. Demnach fällt auch die Seitenfläche $\alpha\beta\gamma$ mit der Seitenfläche ABC zusammen, und $\alpha\beta$ fällt auf AB. Es past also das solide Dreyeck $\gamma\alpha\beta\delta$ in CABD (16 §). Die Seitenfläche $\alpha\gamma\beta$ past auf ACB, auch passen die Winkel an AC und $\alpha\gamma$, imgleichen an BC, und $\beta\gamma$, in einander, und alle diese in einander passende Größen sind gleich (17 §).

201 Fällt die Seitenfläche $\alpha\gamma\delta$ nicht auf eben der Seite
203 von BCD, auf welcher ACD liegt; sondern unter
F. derselben, wenn diese drüber liegt: so lege man den Ausschnitt $\beta\gamma\delta$ auf *bCd*, wie erfodert wird, wenn sie auf einander passen sollen, welches hier angehet,

weil

weil BCD = *b*C*d*. Da nun δ = D = *d*, $\beta\delta$ = BD = *bd*, $\alpha\delta$ = AD = *ad* (510 §): so wird das solide Dreyeck $\gamma\alpha\beta\delta$ so in das Dreyeck C*abd* passen, wie es im ersten Fall in CABD paste. Also ist auch in diesem Fall $\alpha\beta$ = *ab* = AB, β = *b* = B, α = *a* = A.

Ein Bogen, welcher den Winkel zwischen den gleichen Seiten eines gleichschenklichten sphärischen Dreyecks in zweene gleiche Theile theilt, halbirt auch die gegenüberstehende Seite, und steht auf ihr senkrecht.

512 §.

Wenn im sphärischen Dreyeck *ABD* zwo Seiten gleich groß sind, *AD* = *AB*; so sind auch die gegenüberstehenden Winkel gleich groß.

Beweis. Man zeichne das solide Dreyeck C*abd* wie im 505 §: so ist der Winkel *a* = A, die Seite *ad* = AD = AB, und *ab* = AB = AD. Aber aus den dreyen Sätzen *a* = A, *ad* = AB, *ab* = AD folgt, es sey *b* = D (511 §). Nun ist auch *b* = B (510 §). Also D = B.

Im gleichseitigen sphärischen Dreyeck sind also alle drey Winkel gleich groß.

513 §.

Wenn zwo sphärische, oder solide Dreyecke *CABD*, $\gamma\alpha\beta\delta$ zwo gleiche Winkel haben *D* = δ, *B* = β, und die Seiten zwischen diesen Winkeln sind ebenfalls gleich groß, *BD* = $\beta\delta$: so sind die übrigen beyden Seiten gleich, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Beweis.

205 206 F. Beweis. Der Ausschnitt $\beta\gamma\delta$ paßt auf BCD. Man lege ihn also auf BCD gehörig auf, wie im 506 §.

Fallen nun die Seitenflächen $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ auf einer Seite von BCD mit den Seitenflächen ACD, ACB; so fällt $\alpha\gamma\delta$ in ACD, und $\alpha\gamma\beta$ in ACB (317 §). Demnach fällt $\gamma\alpha$ in CA (297 §), und die Dreyecke passen in einander, so daß $\alpha = A$, $\alpha\gamma\delta = ACD$, $\alpha\gamma\beta = ACB$.

Fallen aber die Seitenflächen des Dreyecks $\gamma\alpha\beta\delta$ auf der andern Seite von BCD: so kan $\gamma\alpha\beta\delta$ zwar in CABD nicht passen. Da aber $\beta\gamma\delta$ auch auf bCd paßt, und $\beta = B = b$, $\delta = D = d$; so paßt $\gamma\alpha\beta\delta$ in $Cabd$, und es wird $\alpha = a = A$, $\alpha\gamma\delta = aCd = ACD$, $\alpha\gamma\beta = aCb = ACB$ wie vorhin.

514 §.

204 F. Es können zwo sphärische Dreyecke ABC, AbC einen gleichen Winkel A haben, und zwo gleiche Seiten, wovon eine dem gleichen Winkel gegenüber stehet, ohne daß die übrigen Seiten und Winkel gleich groß sind.

Es können auch zwo sphärische Dreyecke ABc, abC eine gleiche Seite $BC = bC$ haben, und zwo gleiche Winkel $A = a$, $B = b$, wovon einer der gleichen Seite gegenüber stehet, ohne daß die Gleichheit der übrigen Seiten und Winkel daraus folgt.

Beweis d. 1 S. Wenn K der Kugel Mittelpunct ist, so lege man durch eine Seitenlinie CK des soliden, oder sphärischen Dreyecks ABD eine Ebene CKD, auf die gegenüberstehende Seitenfläche AKD senkrecht (320 §), und die Durchschnittslinie sey KD.

Man

Man nehme den Bogen $Db = DB$, ziehe Kb: so giebt die Ebene CKb einen grösten Kreis, wovon ein Bogen Cb zwischen C und b fällt. Aber in den Dreyecken CDB und CDb sind die Winkel bey D gleich groß. Ueberdem ist $DB = Db$, und CD beyden Dreyecken gemein. Also wird $CB = Cb$ (511 §). Demnach haben die Dreyecke ABC, und AbC den Winkel A und die Seite AC gemeinschaftlich, auch sind die dem Winkel A gegenüberstehenden Seiten CB und Cb gleich groß. Aber AB und Ab sind nothwendig ungleich groß, so wie auch die Winkel ACB und ACb. Dies ist auch von dem Winkel ABC und AbC zu sagen. Es ist nemlich, $AbC + CbB = 2R$, aber $CbB = ABC$ (511 §). Also auch $AbC + ABC = 2R$. Demnach können diese beyden Winkel nicht gleich seyn, es sey denn, daß CD mit CB zusammen falle.

Beweis des 2 S. Wenn man die beyden Bogen AB und AC verlängert bis sie in a zusammenstossen: so wird der Winkel $a = A$. Man lege wie vorhin durch KC eine Ebene auf der Ebene AKB senkrecht, und nehme $Db = DB$: so wird der Bogen $Cb = CB$, und der Winkel $DBC = DbC$ (511 §). Also ist auch der Winkel $AbC = ABC$. Demnach ergeben sich zwo Dreyecke ABC, und abC, worinnen $bC = BC$, $a = A$, und $ABC = abC$ ist. Weil nun $AC + aC = 180°$: so können diese Seiten nicht gleich seyn, es sey denn, daß beyde Quadranten wären. In diesem letzten Fall würden auch AD, und BD Quadranten seyn (409 §). Folglich hätte man auch $AB = ab$, und die Dreyecke ABC, abC hätten lauter gleiche Seiten und Winkel (511 §). Wenn aber AC und aC keine Quadranten sind: so ist es

205 F.

auch AD nicht, (weil es sonst auch AC seyn müßte (499 §)). Also sind AB und *a*B ungleich. Eben dies gilt auch von den Winkeln ACB und *a*C*b*, diese können nicht gleich seyn, weil sonst AC = *a*C wäre (513 §) gegen die Voraussetzung.

515 §.

201 F. Wenn im sphärischen Dreyeck *ABD* zweene Winkel gleich sind, *D* = *B*: so sind die gegenüberstehenden Seiten gleich.

Beweis. Man verzeichne das Dreyeck C*abd*, wie im 510 §; so ist *bd* = BD, überdem *d* = D = B, und *b* = B = D. Aber aus den dreyen Sätzen *bd* = BD, *d* = B, *b* = D folgt, es sey *ab* = AD (513 §). Da nun auch *ab* = AB; so ist AD = AB.

Ein gleichwinklichtes sphärisches Dreyeck ist also auch gleichseitig.

516 §.

206 Wenn im sphärischen Dreyeck zweene Winkel *ABD*, *ADB* ungleich sind; so ist die dem

F. größern Winkel *ABD* gegenüberstehende Seite *AD* größer, als die dem kleinern *ADB* gegenüberstehende *AB*.

Beweis. Man lege durch BC eine Ebene BCE unter einem Winkel EBD = ADB, so fällt der Bogen BE zwischen BA und BD, und es wird im Dreyeck BDE die Seite DE = BE (515 §). Also DE + EA = BE + EA, oder AD = BE + EA. Es ist aber BE + EA > AB (507 §). Also auch AD > AB.

Wenn demnach umgekehrt die Seite AD > AB ist: so muß der Winkel ABD > ADB seyn, weil weder ABD = ADB, noch ABD < ADB seyn kan, ohne,

ohne, daß im ersten Fall AD=AB, und im zweeten AD < AB wäre, beydes gegen die Voraussetzung.

517 §.

Wenn die drey Seiten zwoer sphärischen Dreyecke gleich groß sind: so sind auch die Winkel gleich groß, die den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Beweis. Wenn die drey Seiten in zweyen Dreyecken CABD und CEBD gleich groß sind: so kan man allemahl ein paar Seitenflächen so an einander passen, wie hier die beyden mit einerley Buchstaben BCD bezeichneten Seitenflächen. Dann aber fallen die beyden übrigen entweder auf einer Seite, oder auf verschiedenen Seiten, welches letztere die Zeichnung vorstellt. 207 F.

In diesem letztern Fall wird die Ebene ACE zwischen AC und EC einen grösten Kreisbogen AE geben, der den Bogen DB in F schneidet. Dann aber sind in den Dreyecken ADE und ABE die Winkel DAE=DEA, und BAE=BEA (512 §). Also hat man DAE+BAE=DEA=BEA. Fiele F nicht zwischen B und D über B hinaus; so wäre doch DAE—BAE=DEA—BEA, folglich in beyden Fällen BAD =BED. Aber hieraus folgt die Gleichheit der übrigen Winkel bey B und D (511 §).

Zeichnet man nun das dem Dreyeck CABD entgegengesetzte *Cabd*, wie im 510 §: so erhellet, daß CBDE in *Cbad* passe, weil vermöge des Beweises BDE=BDA=*d*, DBE=DBA=*b*, und überdem BD =*bd* (513 §). Und daraus erhellet ferner, daß auch die Gleichheit der Winkel folge, wenn DE und BE mit DA und BA auf einer Seite von BCD fallen.

518 §.

208 F. Es ist auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Dreyeck *ABD* gegeben: man soll auf eben der Kugel ein andres sphärisches Dreyeck verzeichnen, dessen Seiten die Winkel des vorigen, und dessen Winkel die Seiten des vorigen zu 2 *R* ergänzen.

Aufl. Auf den Schenkeln des Winkels A nehme man AE = AF = 90°, und lege durch E und F einen grösten Kreis PR. Eben so nehme man auf des Winkels B Schenkeln BG = BH = 90°, und lege durch G und H den grösten Kreis PQ; imgleichen auf des Winkels D Schenkeln DI = DK = 90°, und lege durch I und K den grösten Kreis QR. Diese drey grösten Kreise geben ein Dreyeck PQR, und dies ist das gesuchte.

Beweis. Weil A des Bogens PR und B des Bogens PQ Pol ist (478 §); so sind die Bogen gröster Kreise PA, PB = 90° (501 §), also P des Bogens AB Pol (495 §). Eben so erhellet, daß Q des Bogens BD, und R des Bogens AD Pol sey. Demnach ist PH = 90° = GQ, und PH + GQ = 180°. Aber GQ = HQ + GH, also ist PH + HQ + GH = 180°, oder PQ + GH = 180°. Da nun GH des Winkels B Maaß ist für den Halbmesser der Kugel (509 §); so ist auch PQ + B = 180°. Es erhellet eben so, daß PR + A, und QR + D = 180° sey.

Ferner ist AE = 90° = BH, also AE + BH = 180°. Da nun AE = AB + BE, so ist auch AB + BE + BH = 180°, oder AB + EH = 180°. Weil überdem EH des Winkels P Maaß ist (499 §), so wird AB + P = 180°. Es folgt auf eben die Art, daß BD + Q, und AD + R = 180° sey.

519 §.

519 §.

Die Summe aller dreyer Winkel eines sphärischen Dreyecks *ABD* ist grösser, als 2 *R*, und kleiner, als 6 *R*.

Beweis. Man verzeichne das Dreyeck PQR, wie im vor. §, so ist $A = 2R - PR$, $B = 2R - PQ$, $D = 2R + QR$, also $A + B + C = 6R + PR + PQ - QR$, und folglich $A + B + C < 6R$. 208 F.

Weil nun $PR + PQ + QR < 4R$ (509 §), so ist $6R - PR - PQ - QR > 2R$, oder $A + B + C > 2R$.

420 §.

Wenn die drey Winkel eines sphärischen Dreyecks *ABD* so groß sind, als die drey Winkel eines andern α, β, δ, nemlich $A = \alpha$, $B = \beta$, $D = \delta$: so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleich groß. 208 209 F.

Beweis. Man verzeichne für beyde die Dreyecke PQR und *pqr*, wie im 517 §; so hat man $PR = 180° - A$, $PQ = 180° - B$, $QR = 180° - D$. Ueberdem $pr = 180° - \alpha$, $pq = 180° - \beta$, $qr = 180° - \delta$. Demnach ist $PR = pr$, $PQ = pq$, $QR = qr$, weil vermöge der Voraussetzung $A = \alpha$, $B = \beta$, $D = \delta$. Hieraus folgt, es sey $Q = q$, $R = r$, $P = p$ (517 §). Aber $Q + BD = 180° = q + \beta\delta$, also $BD = \beta\delta$. Ferner $R + AD = 180° = r + \alpha\delta$, also $AD = \alpha\delta$, überdem $P + AB = 180° = p + \alpha\beta$, also auch $AB = \alpha\beta$.

Der XXIV. Abschnitt.

Die sphärische Trigonometrie.

521 §.

Aus den bisherigen Lehren ergiebt sich eine grosse Aehnlichkeit der Eigenschaften sphärischer Dreyecke, und ebener gradlinichter Dreyecke untereinander. Drey Stücke von dem Umfang eines sphärischen Dreyecks bestimmen die übrigen; einige besondre Fälle ausgenommen. Deswegen lassen sich aus dreyen solchen gegebenen Stücken die übrigen durch eine ähnliche Rechnung finden, wie aus dreyen Stücken eines gradlinichten Dreyecks die übrigen berechnet wurden. Die Wissenschaft von den Rechnungs-Regeln, nach welchen aus dreyen Stücken von dem Umfang eines sphärischen Dreyecks, die übrigen gefunden werden, heist die sphärische Trigonometrie. Sie kan auch die körperliche Trigonometrie heissen, weil die Seiten und Winkel körperlicher Dreyecke nach eben den Regeln berechnet werden.

522 §.

210 F. Ein sphärisches Dreyeck MNR heist ein rechtwinklichtes, wenn ein Winkel desselben, wie MRN ein rechter Winkel ist. Die Seiten MR, NR, welche den rechten Winkel einschliessen, heissen die Perpendicular-Seiten, oder Catheti, und die dritte MN, welche dem rechten Winkel gegenüberstehet, wird auch hier die Hypothenuse genant.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sey in der Folge allemahl der rechte Winkel = R, die eine Perpendiculär-Seite = B, die andre = P, der Winkel an B = M, der Winkel an P = N, die Hypothenuse sey H.

523 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel. 210 F.

Beweis. Wenn die Halbmesser RC, MC, NC, der Kugel gezogen sind, auf deren Oberfläche das Dreyeck verzeichnet ist; so schliessen die Sectoren RCM, RCN, MCN am Mittelpunct C der Kugel, das zugehörige solide Dreyeck ein (505 §). Aus N sey auf CR die Linie NG senkrecht gezogen, so steht NG zugleich auf der Ebene RCM senkrecht (314 §). Demnach ist NFG = dem sphärischen Winkel M (313. 499 §). Nun hat man CN : sin. tot = NF : sin NCF, und CN : sin. tot = NG : sin NCG, also NF : sin NCF = NG : sin NCG, oder NF : NG = sin NCF : sin NCG. Ueberdem ist NF : NG = sin tot : sin NFG, also wird sin tot : sin NFG = sin NCF : sin NCG. Da nun NFG = M, NCF = H, NCG = P; so ist sin tot : sin M = sin H : sin P, oder sin tot : sin H = sin M : sin P.

Setzt man nun in der Folge der Kürze wegen allemahl sin tot = r; so hat man

$$r : \sin H = \sin M : \sin P.$$

Also auch $r : \sin H = \sin N : \sin B$.

Folglich auch $\sin M : \sin P = \sin N : \sin B$.

524 §.

Der ganze Umfang des Dreyecks bestehet aus

dreyen Seiten B, P, H, und dreyen Winkeln M, N, R. Wenn nun hievon drey Stücke gegeben sind, und eins gesucht wird: so werden in der Aufgabe allemahl vier Stücke vorkommen, drey gegebene, und eins, das man finden soll. Unter den gegebenen Stücken ist allemahl der rechte Winkel befindlich. Deswegen werden ausser demselben in der Aufgabe noch drey andre Stücke vorkommen, wovon zwey gegeben sind, und das dritte gesucht wird. Alle hieher gehörigen Fälle lassen sich so übersehen. In der Aufgabe kommen ausser dem rechten Winkel vor:

I) Entweder alle drey Seiten

II) oder nicht alle drey Seiten. Also

A. zwo Seiten, und ein Winkel. Folglich

a) die beyden Perpendiculär-Seiten, und ein Winkel.

b) Die Hypothenuse, eine Perpendiculärseite, und ein Winkel.

α) Die Hypothenuse, eine Perpendiculärseite, und der entgegengesetzte Winkel.

β) Die Hypothenuse, eine Perpendiculärseite, und der anliegende Winkel.

B. Nur eine Seite, und zweene Winkel. Also

a) die Hypothenuse, und zweene Winkel.

b) Eine Perpendiculär-Seite, und zweene Winkel.

525 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel von zwoen Seiten, die den rechten Winkel nicht einschliessen, und dem der Perpendicular-Seite gegenüberstehenden Winkel, zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden (524 § litt. a).

Aufl. Diese drey Stücke sind H, P, M, oder welches einerley ist, H, B, N. Weil nun

$$r : \sin H = \sin M : \sin P$$
$$\sin H : r = \sin P : \sin M$$
$$\text{und } \sin M : \sin P = r : \sin H$$
$$\text{oder auch } r : \sin H = \sin N : \sin B$$
$$\sin H : r = \sin B : \sin N$$
$$\text{und } \sin N : \sin B = r : \sin H;$$

so kan man allemahl aus zweyen von diesen Stücken das dritte finden.

Man braucht hier bey der würklichen Berechnung mit noch grösserm Vortheil, als in der ebenen Trigonometrie, die Logarithmen, indem auch hier statt der Seiten ihre trigonometrischen Linien in Rechnung kommen. Auch hat Neper den Gebrauch der Logarithmen würklich zuerst in der sphärischen Trigonometrie gewiesen.

Es sey $H = 30°$, $M = 23° 28' 20''$: so findet man

$l \sin 30° = 9{,}6989700$
$l \sin 23° 28' = 9{,}6001181$
$20'' \quad\quad\quad\

526 §.

Da die Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, u. s. f. verschiedener Winkel gleich groß seyn können: so wird es zuweilen zweifelhaft, ob der gesuchte Winkel spitz, oder stumpf, und die gesuchte Seite kleiner, oder größer, als ein Quadrant sey, dafern man dies nicht aus andern Gründen, als allein aus der Größe dieser Linien beurtheilen kan. Es ist hier eigentlich nur allemahl die Rede von solchen Dreyecken, worin keine Seite größer, als ein Halbkreis, also auch kein Winkel größer, als 180° ist (506 §). Wenn man demnach bey den gegebenen Stücken auch die Lage der trigonometrischen Linien in Betracht zieht, und den dreyen ersten Gliedern der Proportion die ihnen zugehörigen Zeichen + und — gehörig voran setzt; so wird dadurch das Zeichen des vierten Gliedes bestimt, und nun kan es nur in dem Fall zweifelhaft bleiben, ob das gesuchte größer, oder kleiner, als 90° sey, wenn das vierte Glied ein Sinus ist. Dies ist es nun in allen Fällen des vorigen 525 §. Indessen bleibt die Sache doch nur zweifelhaft, wenn das gesuchte die Hypothenuse ist. Denn aus zweenen Winkeln, und einer Seite, die einem Winkel gegenüberstehet, werden die übrigen Stücke nicht bestimt (514 §). Wie die Sache in den übrigen beyden Fällen beurtheilet werden müsse, wird sich gleich näher zeigen.

527 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich der ganze Sinus zum Sinus einer Perpendicular-Seite, wie die Tangente des an dieser Seite anliegenden Winkels zur Tangente

gente der gegenüberstehenden Perpendiculär-Seite.

Beweis. Wenn die Figur eben so, wie im 523 § gezeichnet wird, so ist CG:GN = r:tang NCG, und GN:GF = tang NFG:r. Also CG:GF = tang NFG: tang NCG (193 §). Da nun CG:GF = r:sin GCF, so ist r:sin GCF = tang NFG:tang NCG, oder r: sin B = tang M:tang P. Also aus eben der Ursache auch r:sin P = tang N:tang B.

528 §.

Jeder von den Winkeln, die an den beyden Perpendiculär-Seiten anliegen, ist mit der gegenüberstehenden Seite von einerley Art.

Beweis. In der Proportion r:sin B = tang M: tang P sind die beyden ersten Glieder positiv, weil B nie größer, als 180° ist. Wenn also

a) M < 90°, so ist +r:+sin B = tang M:+tang P, also P < 90°.

b) M = 90°, so ist tang M = ∞, also auch tang P = ∞, und P = 90°.

c) M > 90°, so ist +r:+sin B = −tang M:−tang P, und P > 90°.

Diese drey Sätze gelten auch umgekehrt, weil sin B:r = tang P:tang M.

Hieraus beurtheilet man im 525 §, ob P und M kleiner, oder größer, als 90° zu nehmen sind, wenn P aus H und M, oder M aus H und P gesucht wird.

529 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel von den beyden Perpendiculär-Seiten, und noch einem

Winkel

Winkel zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden (523 § litt. a).

210 F. Aufl. Diese drey Stücke sind B, P, M, oder B, P, N. Da nun

$r : \sin B = \tang M : \tang P$,

oder $r : \sin P = \tang N : \tang B$,

so findet man allemahl aus zweenen von diesen Stücken, das dritte, wenn man nur jedesmahl die Proportion gehörig ordnet, damit das gesuchte Glied das letzte werde.

Wird B aus M und P gesucht, so ist es zweifelhaft, ob B größer, oder kleiner, als 90° zu nehmen seye. Denn in der Proportion

$\tang M : \tang P = r : \sin B$.

haben M und P allemahl einerley Zeichen (523 §), und der positive Sinus von B gehört zu zweenen Bogen, davon einer größer, der andre kleiner, als 90° ist. Die Ursache dieser Zweydeutigkeit liegt wiederum im (514 §). In den übrigen Fällen fällt die Zweydeutigkeit weg. Das Zeichen + oder — des dritten Gliedes der Proportion bestimt das Zeichen des vierten.

530 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich

1) der ganze Sinus zum Cosinus eines Catheti, wie der Cosinus des andern Catheti zum Cosinus der Hypothenuse.

2) Der ganze Sinus zum Cosinus eines Catheti wie der Sinus des anliegenden Winkels zum Cosinus des gegenüberstehenden Winkels.

Beweis.

Beweis. Beyde Proportionen schliest man aus dem 523 § auf folgende Art. Im Dreyeck MNR, das man sich auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct C ist, gezeichnet vorstellen muß, verlängere man MR bis Q; und MN bis S, so daß MQ und MS Quadranten werden. Man ziehe die Halbmesser der Kugel CQ, CS: so steht MC nebst MCS und MCQ auf der Ebene QCS senkrecht (305. 315 §), und der Bogen QS gehört zum grösten Kreise, der durch des Kreises QRM Pole geht (479 §). Aus eben der Ursache geht auch RN verlängert durch des Kreises QRM Pole. Wenn also QS, RN einander in V schneiden: so ist V des Kreises QRM Pol, und die Bogen VQ, VR sind Quadranten. Weil nun das Dreyeck VSN bey S rechtwinklicht ist, so hat man aus dem 523 § 211 F.

$r : \sin VN = \sin SVN : \sin SN.$

Aber $\sin VN = \cos P$, $\sin SVN = \sin QR = \cos B$, und $\sin SN = \cos H$. Also ist

1) $r : \cos P = \cos B : \cos H.$

Ferner ist $r : \sin VN = \sin VNS : \sin VS$, und $\sin VNS = \sin N$, $\sin VS = \cos QS = \cos M$. Also

2) $r : \cos P = \sin N : \cos M.$

531 §.

Wenn im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck beyde Perpendiculär-Seiten von einerley Art sind: so ist die Hypothenuse $< 90°$.

Sind beyde Perpendiculär-Seiten von verschiedener Art: so ist die Hypothenuse $> 90°$.

Ist eine von den beyden Perpendiculär-Seiten $= 90°$: so ist auch die Hypothenuse $= 90°$.

Beweis.

Beweis. Dies sind leichte Folgen aus der Proportion $r : \cos B = \cos P, \cos H$ (530 §), worin das Zeichen des letzten Gliedes aus dem Zeichen der beyden mittlern sich so bestimt:

$+r : +\cos B = +\cos P : +\cos H$
$+r : -\cos B = -\cos P : +\cos H$
$+r : +\cos B = -\cos P : -\cos H$
$+r : -\cos B = +\cos P : -\cos H.$

Wenn B oder $P = 90°$ ist, so ist $\cos B$ oder $\cos P = 0$, und in beyden Fällen auch $\cos H = 0$, also $H = 90°$.

Diese drey Sätze sind auch umgekehrt wahr, wie aus Betrachtung der Proportion leicht erhellet.

532 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel zwo Seiten gegeben, man soll die dritte finden (524 § n. 1).

Aufl. Die Proportion $r : \cos B = \cos P : \cos H$ (530 §) enthält alle drey Seiten und läst sich in jedem besondern Fall leicht so ordnen, daß die gesuchte Seite zuletzt stehet.

Bey dieser Aufgabe giebt es gar keine zweydeutige Fälle, weil das Zeichen des vierten Gliedes allemahl durch die übrigen bestimt wird.

533 §.

Ausser dem rechten Winkel sind von den beyden übrigen Winkeln und einer Perpendiculär-Seite zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden (424 § litt. b).

Aufl. Die Stücke M, N, P, oder M, N, B sind

sind alle in der Proportion

$r : \cos P = \sin N : \cos M$

oder $r : \cos B = \sin M : \cos N$

enthalten. Also findet man aus zweyen das dritte, wenn man nur die Proportion gehörig ordnet.

Wenn N aus P und M, oder M aus B und N gesucht wird, so ist es zweifelhaft, ob das gesuchte spitz, oder stumpf sey (514 §). Die übrigen beyden Fälle sind bestimt, da B und N, P und M allemahl von einerley Art sind.

534 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich

1) der ganze Sinus zur Cotangente eines der beyden übrigen Winkel, wie die Cotangente des andern Winkels zum Cosinus der Hypothenuse.

2) Der ganze Sinus zum Cosinus eines der beyden übrigen Winkel, wie die Cotangente der anliegenden Perpendiculär-Seite, zur Cotangente der Hypothenuse.

Beweis. Wenn die Figur eben so, wie im 530 § gezeichnet wird, so hat man im Dreyeck SVN nach dem 527 §, $r : \sin SN = \tang VNS : \tang SV$. Aber $\sin SN = \cos H$, $\tang VNS = \tang N$, $\tang SV = \cot QS = \cot M$. Also ist $r : \cos H = \tang N : \cot M$, oder $r : \tang N = \cos H : \cot M$. Da nun $\cot N : r = r : \tang N$ (418 §), so wird $\cot N : r = \cos H : \cot M$, oder 1) $r : \cot M = \cot N : \cos H$. 211 F.

Man hat überdem im Dreyeck SVN die Proportion $r : \sin SV = \tang SVN : \tang SN$. Aber $\sin SV$

=

$= \cos M$, tang SVN $=$ tang QR $=$ cot B, und tang SN $=$ cot H. Also wird

2) $r : \cos M = \cot B : \cot H = \tan g H : \tan g B$.

535 §.

Wenn im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck beyde Winkel an der Hypothenuse von einerley Art sind, so ist die Hypothenuse $< 90°$.

Sind diese beyden Winkel von verschiedener Art, so ist die Hypothenuse $> 90°$.

Und wenn einer dieser Winkel $= 90°$; so ist auch die Hypothenuse $= 90°$.

Beweis. Alle drey Sätze folgen aus der Proportion $r : \cot M = \cot N : \cos H$, wenn man die Zeichen + und − gehörig voran setzt. Es wird nemlich

$+r : +\cot M = +\cot N : +\cos H$
$+r : -\cot M = -\cot N : +\cos H$
$+r : +\cot M = -\cot N : -\cos H$
$+r : -\cot M = +\cot N : -\cos H$.

Wenn M, oder $N = 90°$ ist: so ist cot M, oder cot N $= 0$, und in beyden Fällen $\cos H = 0$, also auch $H = 90°$.

Alle drey Sätze sind auch umgekehrt wahr, welches ebenfalls sehr leicht aus Betrachtung der Proportion folgt.

536 §.

Ausser dem rechten Winkel sind von den beyden übrigen Winkeln, und der Hypothenuse zwey Stücke gegeben, man sucht das dritte (524 § lit. a).

Aufl. Die Proportion

$r : \cot M = \cot N : \cos H$

ordne man so, daß das gesuchte im letzten Gliede stehet: so wird es durch die übrigen Stücke völlig bestimt, so, daß hier gar kein zweydeutiger Fall statt hat.

537 §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel von zwoen Seiten, die den rechten Winkel nicht einschliessen, nebst dem eingeschlossenen Winkel, zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden (524 § litt. β).

Aufl. Bey dieser Aufgabe ist die 2te Proportion des 534 § brauchbar. Es ist nemlich $r : \cos M = \cot B : \cot H = \tang H : \tang B$, oder $r : \cos N = \cot P : \cot H = \tang H . \tang P$, welches man in jedem besondern Fall leicht so ordnet, daß das gesuchte ins letzte Glied komt.

Auch findet bey dieser Aufgabe keine Zweydeutigkeit statt, weil das Zeichen des letzten Gliedes es völlig bestimt, ob das gesuchte größer, oder kleiner, als 90° sey.

538 §.

Die erwiesenen sechs Proportionen (523. 527. 530. 534 §) sind demnach hinlänglich, alle Aufgaben, die für die rechtwinklichten Dreyecke vorkommen können, aufzulösen. Setzt man den ganzen Sinus $= 1$: so kan man folgende Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln des rechtwinklichten Dreyecks, aus diesen Proportionen schliessen.

I) $1 : \sin H = \sin M : \sin P$.

Also $\sin H = \frac{\sin P}{\sin M}$, $\sin P = \sin M \sin H$,

$\sin M = \frac{\sin P}{\sin H}$.

II) $1 : \sin B = \operatorname{tang} M : \operatorname{tang} P = \cot P : \cot M$ (418§).

Also $\operatorname{tang} P = \sin B \operatorname{tang} M = \frac{\sin B}{\cot M}$, $\sin B = \frac{\operatorname{tang} P}{\operatorname{tang} M} = \operatorname{tang} P \cot M$, $\operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang} P}{\sin B}$.

III) $1 : \cos B = \cos P : \cos H$.

Also $\cos H = \cos B \cos P$, $\cos B = \frac{\cos H}{\cos P}$,

$\cos P = \frac{\cos H}{\cos B}$.

IV) $1 : \cos B = \sin M : \cos N$.

Also $\cos N = \cos B \sin M$, $\cos B = \frac{\cos N}{\sin M}$,

$\sin M = \frac{\cos N}{\cos B}$.

V) $1 : \cot M = \cot N : \cos H$.

Also $\cos H = \cot M \cot N = \frac{\cot M}{\operatorname{tang} N} = \frac{\cot N}{\operatorname{tang} M}$; $\cot M = \frac{\cos H}{\cot N} = \cos H \operatorname{tang} N$;

$\cot N = \frac{\cos H}{\cot M} = \cos H \operatorname{tang} M$.

VI)

VI) $1 : \cos M = \cot B : \cot H = \tang H : \tang B$.

Also $\cot H = \cos M \cot B = \frac{\cos M}{\tang B}$, $\cot B = \frac{\cot H}{\cos M}$; $\cos M = \frac{\cos H}{\cot B} = \frac{\tang B}{\tang H}$;

$\tang B = \cos M \tang H$.

539 §.

Auch im schiefwinklichten sphärischen Dreyeck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der entgegenstehenden Winkel.

Beweis. Wenn ABC ein solches Dreyeck ist: so lege man durch die Spitze eines Winkels B, und den Mittelpunct der Kugel eine Ebene, die auf der Ebene der entgegengesetzten Seite senkrecht ist. Diese giebt auf der Kugel Oberfläche einen Bogen eines gröſten Kreises BD, der auf AC senkrecht ist, und man hat statt des schiefwinklichten Dreyecks ABC zwey andre, die bey D rechtwinklicht sind. Diese geben (523 §) 212 F.

$r : \sin AB = \sin A : \sin BD$, und

$r : \sin BC = \sin C : \sin BD$, also ist

$\sin AB : \sin BC = \sin C : \sin A$ (193 §)

oder $\sin AB : \sin C = \sin BC : \sin A$.

Wenn auch CE auf AB senkrecht ist: so folgt eben so, es sey $\sin BC : \sin A = \sin AC : \sin B$, also ist auch $\sin AB : \sin C = \sin AC : \sin B$.

540 §.

Die Figur ist so gezeichnet, daß das Perpendicul BD innerhalb des Dreyecks fällt. Wenn es aber auch ausserhalb des Dreyecks fiele: so würden die 213 F.

übrigen Proportionen dennoch richtig seyn. Man kan übrigens in jedem vorkommenden Fall aus der Beschaffenheit der Winkel A und C beurtheilen, ob das Perpendicul innerhalb; oder ausserhalb des Dreyecks fallen werde.

212 F. Wenn beyde Winkel *A* und *ACB* von einerley Art sind: so fällt *BD* innerhalb des Dreyecks. Denn ist A sowohl, als ACB spitz; so ist $BCd > 90°$. Nun setze man, es sey nicht BD; sondern *Bd* auf AC senkrecht: so wäre $Bd < 90°$, weil $A < 90°$, und zugleich $Bd > 90°$, weil $BCd > 90°$ (528 §), welches nicht zusammen bestehen kan. Wenn A sowohl, als ACB stumpf, also $BCd < 90°$ wäre, so würde ein ähnlicher Widerspruch folgen. Demnach fällt das Perpendicul nothwendig innerhalb des Dreyecks.

213 F. Wenn beyde Winkel *A* und *ACB* von verschiedener Art sind: so fällt das Perpendicul ausserhalb des Dreyecks. Denn es sey $A < 90°$, und $ACB > 90°$, also $BCD < 90°$. Es sey abermahl nicht BD, sondern *Bd* auf AC senkrecht: so wäre $Bd < 90°$, weil $A < 90°$, und zugleich $Bd > 90°$, weil $ACB > 90°$ (528 §), welches wiederum mit sich selbst streitet. Also fällt nun das Perpendicul nothwendig ausserhalb des Dreyecks.

§41 §.

212 213 F. Wenn *BD* auf der Grundlinie *AC* senkrecht steht: so verhalten sich die Sinus der beyden Stücke der Grundlinie umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Winkel.

Und die Cosinus der beyden Stücke der Grundlinie verhalten sich, wie die Cosinus der anliegenden Seiten.

Beweis. Denn es ist r : sin AD = tang A : tang BD, und r : sin CD = tang C : tang BD (527 §). Also sin AD tang A = sin CD tang C, und sin AD : sin CD = tang C : tang A (199 §). Ferner ist r : cos BD = cos AD : cos AB, und r : cos BD = cos CD : cos BC (525 §). Also cos AD : cos AB = cos CD : cos BC, oder cos AD : cos CD = cos AB : cos BC.

542 §.

Wenn *BD* auf der Grundlinie *AC* senkrecht steht: so verhalten sich die Sinus der beyden Winkel an der Spitze *B*, wie die Cosinus der Winkel an der Grundlinie. 212 213 F.

Und die Cosinus der beyden Winkel an der Spitze *B* umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Seiten.

Beweis. Es ist nemlich r : cos BD = sin ABD : cos A, und r : cos BD = sin CBD : cos C (530 §). Also wird sin ABD : cos A = sin CBD : cos C, oder auch sin ABD : sin CBD = cos A : cos C. Ferner ist r : cot BD = cos ABD : cot AB, und r : cot BD = cos CBD : cot BC (521 §). Also cos ABD : cot AB = cos CBD : cot BC, oder cos ABD : cos CBD = cot AB : cot BC, oder auch cos ABD : cos CBD = tang BC : tang AB (431 §).

543 §.

Aus diesen Proportionen läst sich nun auch die Auflösung aller Fälle, die bey den schiefwinklichten Dreyecken vorkommen können, herleiten. Alle diese Fälle kan man zum voraus auf folgende Art übersehen. Man sucht entweder einen Winkel, oder eine Seite, und in beyden Fällen müssen drey Stücke gegeben seyn.

I) Wird also ein Winkel gesucht: so können gegeben seyn:

A. Alle drey Seiten,

B. zwo Seiten, und ein Winkel. Also

a) zwo Seiten, die den gegebenen Winkel einschliessen,

b) zwo Seiten, die den gesuchten Winkel einschliessen,

c) zwo Seiten, die den dritten Winkel einschliessen.

C. Eine Seite, und zweene Winkel. Also

α) die Seite zwischen den gegebenen Winkeln

β) die Seite zwischen einem gegebenen und dem gesuchten Winkel.

II) Wird eine Seite gesucht, so sind gegeben.

A. Alle drey Winkel,

B. zweene Winkel, und eine Seite. Also

a) zweene Winkel an der gegebenen Seite,

b) zweene Winkel an der gesuchten Seite,

c) zweene Winkel an der dritten Seite.

C. Ein Winkel, und zwo Seiten. Also

α) der Winkel zwischen den gegebenen Seiten,

β) der Winkel zwischen einer gegebenen, und der gesuchten Seite.

544 §.

Es werden gegeben zwo Seiten AB, BC, und ein Winkel A, der einer Seite BC gegenüberstehet: man sucht den Winkel C, welcher

der

der andern gegebenen Seite *AB* entgegen stehet (543 §. n. I. litt. c.)

Aufl. Man schliesse nach dem 539 § sin BC: sin A = sin AB: sin C. Also wird sin C = $\frac{\sin AB \sin A}{\sin BC}$, und eben so sin B = $\frac{\sin AC \sin A}{\sin BC}$, sin A = $\frac{\sin BC \sin B}{\sin AC}$. 212 213 F.

Der gesuchte Winkel kan hier stumpf, oder spitz seyn, und er wird durch die gegebenen Stücke allein nicht weiter bestimt (514 §).

545 §.

Es werden zweene Winkel *A*, *B* und eine Seite *BC* gegeben, die einem Winkel gegenüberstehet; man soll die dem andern Winkel gegenüberstehende Seite *AC* finden (543 §. n. II. litt. c.)

Aufl. Es ist sin A: sin BC = sin B: sin AC, also sin AC = $\frac{\sin BC \sin B}{\sin A}$. Eben so ist auch sin AB = $\frac{\sin BC \sin C}{\sin A}$, und sin BC = $\frac{\sin AC \sin A}{\sin B}$.

Die gesuchte Seite kan auch hier größer, oder kleiner, als 90° seyn, und welches von beyden statt habe, wird durch die gegebenen Stücke allein nicht bestimt (514 §).

546 §.

In jedem sphärischen Dreyeck *ABC* ist cos *A* =

$= \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC}$, und $\sin \frac{1}{2} A =$

$\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(BC+AB-AC) \sin \frac{1}{2}(BC+AC-AB)}{\sin AB \sin AC}}$,

wenn der ganze Sinus $= 1$ ist.

Beweis. Wenn der Bogen BD auf AC senkrecht ist, so hat man $\cos CD = \frac{\cos BC \cos AD}{\cos AB}$ (541 §). Aber auch $\cos CD = \cos(AC-AD) = \cos AC \cos AD + \sin AC \sin AD$ (423 §). Also ist $\cos AC \cos AD + \sin AC \sin AD = \frac{\cos BC \cos AD}{\cos AB}$, oder $\cos AC + \sin AC \tang AD = \frac{\cos BC}{\cos AB}$, und $\tang AD = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\cos AB \sin AC}$. Ferner ist $\tang AD = \cos A \tang AB$ (525 §) $= \frac{\cos A \sin AB}{\cos AB}$. Also wird $\cos A \sin AB = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AC}$, und $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC}$.

Nun ist vermöge des 425 § $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$. Also erhält man $2 \sin \frac{1}{2} A^2 = 1 - \cos A$

$= \frac{\sin AB \sin AC + \cos BC + \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC}$

$\frac{\cos(AB-AC) + \cos BC}{\sin AB \sin AC}$ (423 §). Es sey

AC

$AB-AC=\vartheta$, und $BC=\eta$; so ist $2\sin\frac{1}{2}A^2=\frac{\cos\vartheta-\cos\eta}{\sin AB\sin AC}$, oder $\sin\frac{1}{2}A^2=\frac{\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}{\sin AB\sin AC}$ (451 §). Weil nun vermöge der Voraussetzung $\eta+\vartheta=BC+AB-AC$, und $\eta-\vartheta=BC+AC-AB$: so wird $\sin\frac{1}{2}A=r\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(BC+AB-AC)\sin\frac{1}{2}(BC+AC-AB)}{\sin AB\sin AC}}$.

547 §.

Im sphärischen Dreyeck ABC sind die drey Seiten gegeben, man sucht einen Winkel A (543 §. n. I. litt. A.)

Aufl. Die am Ende des vor. § gefundene Gleichung giebt $\sin\frac{1}{2}A^2=\frac{\sin\frac{1}{2}(BC+AB-AC)\sin\frac{1}{2}(BC+AC-AB)}{\sin AB\sin AC}$. Wenn man also die Sinus der Tafeln für den Halbmesser $r=1,0000000$ braucht: so giebt dies die Proportion $\sin AB\sin AC:\sin\frac{1}{2}(BC+AB-AC)\sin\frac{1}{2}(BC+AC-AB)=rr:\sin\frac{1}{2}A^2$, woraus also $l\sin\frac{1}{2}A^2$, ferner $l\sin\frac{1}{2}A$, und $\frac{1}{2}A$ selbst, also auch A gefunden werden kan.

Weil niemals $A>180°$ ist (506 §): so ist nie $\frac{1}{2}A>90°$, und man muß daher allemahl den spitzen Winkel nehmen, der dem $\sin\frac{1}{2}A$ zugehört.

548 §.

Im sphärischen Dreyeck ABC ist $\cos AB=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}$, und $\cos\frac{1}{2}AB^2=r\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin A\sin B}}$. 214 F.

Beweis. Man verzeichne das Dreyeck abc, dessen Seiten die Winkel des Dreyecks ABC, und dessen Winkel die Seiten des Dreyecks ABC zu 180° ergänzen (518 §), so hat man aus dem (540 §) $\cos a$

$$= \frac{\cos bc - \cos ab \cdot \cos ac}{\sin ab \sin ac}.$$

Es ist aber	folglich
$AB + a = 180°$	$\cos a = -\cos AB$
$C + bc = 180°$	$\cos bc = -\cos C$
$B + ab = 180°$	$\cos ab = -\cos B$
$A + ac = 180°$	$\sin ab = +\sin B$
	$\cos ac = -\cos A$
	$\sin ac = +\sin A$

Also erhält man

$$-\cos AB = \frac{-\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

oder

$$\cos AB = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Weil nun $\cos \frac{1}{2} AB = \sqrt{\frac{1 + \cos AB}{2}}$ (425 §):

so wird $2 \cos \frac{1}{2} AB^2 = 1 + \cos AB =$

$$\frac{\sin A - \sin B + \cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\cos (A - B) + \cos C}{\sin A \sin B}$$

(423 §) $= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(C + A - B) \cos \frac{1}{2}(C + B - A)}{\sin A \sin B}$

(451 §), und dieserwegen $\cos \frac{1}{2} AB =$

$$\sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(C + A - B) \cos \frac{1}{2}(C + B - A)}{\sin A \sin B}}.$$

549 §.

Im sphärischen Dreyeck sind alle drey Winkel gegeben, man soll eine Seite finden (543 § n. II. litt. A.)

Aufl. Aus der Gleichung $\cos\frac{1}{2}AB^2 = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin A \sin B}$ folgt die Proportion $\sin A : \sin B : \cos\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C+B-A) = rr : \cos\frac{1}{2}AB^2$, wo r den Halbmesser der Tafeln bedeutet. Hieraus findet man $l\cos\frac{1}{2}AB^2$, also auch $l\cos\frac{1}{2}AB$, woraus sich denn $\frac{1}{2}AB$, und ferner AB selbst ergiebt. Da AB nie größer, als 180° ist: so wird $\frac{1}{2}AB$ nie größer, als 90°, obgleich wegen der Zweydeutigkeit des Wurzelzeichens durch $\frac{1}{2}AB$, hier auch ein Bogen, der größer, als ein Quadrant wäre, verstanden werden könte.

550 §.

Es sind zwo Seiten *AB*, *AC*, nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben, man soll die dritte Seite *BC* finden (543 §. n. II. litt. α.) 212 213

I. Aufl. Aus der Gleichung $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC}$ (546 §) erhält man $\cos BC = \cos AB \cos AC + \cos A \sin AB \sin AC$. F.

II. Aufl. Weil diese Gleichung so bequem nicht ist, die Seite BC durch Hülfe der Logarithmen zu finden, und dies bey den folgenden Aufgaben eben so wird befunden werden; so wird von nun an die allgemeine Regel diese seyn:

Man ziehet von der Spitze eines Winkels auf die entgegengesetzte Seite einen senkrech-

ten

ten Bogen, und zwar so, daß eines von den beyden rechtwinklichten Dreyecken, so man dadurch erhält, zwey von den gegebenen Stücken enthalte, um die übrigen Stücke desselben daraus zu finden. Hiemit verbindet man sodann die im 541 und 542 § erwiesenen Proportionen, da sich dann die gesuchten Stücke des schiefwinklichten Dreyecks ergeben.

Bey gegenwärtiger Aufgabe wird man demnach so verfahren müssen. Auf eine der gegebenen Seiten CA fälle man den senkrechten Bogen BD, so wird $CD = CA - AD$, und im rechtwinklichten Dreyeck ABD sind AB und A gegeben. Also kan man AD finden aus der Proportion:

$r : \cos A = \text{tang } AB : \text{tang } AD$ (537 §)

Wenn nun A und AB beyde kleiner, oder beyde größer, als 90° sind: so wird in beyden Fällen AD kleiner, als 90° seyn, da man dann leicht beurtheilt, ob D zwischen A und C, oder über C hinaus falle. Es ist nemlich $CD = CA - AD$. Also fällt D zwischen A und C, wenn $AD < CA$, und über C hinaus, wenn $AD > CA$ ist.

Dafern von A und AB, das eine kleiner, und das andre größer, als 90° ist; so wird $AD > 90°$ und man beurtheilet eben so, wohin der Punct D falle.

Hierauf schliest man $\cos AD : \cos CD = \cos AB : \cos BC$ (541 §), woraus BC gefunden wird. Es ist BD kleiner, oder größer, als 90°, nachdem es A ist. Wenn also CD und A beyde kleiner; oder beyde größer als 90° sind; so ist BC kleiner, als 90°; wenn aber eins von beyden kleiner, das andre größer, als 90° ist: so wird $BC > 90°$ seyn (531 §).

551 §

551 §.

Es sind wiederum zwo Seiten gegeben, nebst dem eingeschlossenen Winkel: man soll einen von den übrigen beyden Winkeln finden (543 §. n. I. litt. a)

Aufl. Wenn A, AB, AC gegeben sind, und man sucht B: so setze man $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$.

Nun hat man aus dem 546 §

I) $\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\gamma . \cos\alpha}{\sin\gamma . \sin\alpha .}$

II) $\cos A = \frac{\cos\alpha + \cos\gamma . \cos\beta}{\sin\gamma . \sin\beta .}$

und III) $\sin\alpha = \frac{\sin\beta \sin A}{\sin B}$ (539 §).

Aus diesen dreyen Gleichungen kan man $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ wegschaffen: so erhält man eine Gleichung zwischen α, β, γ, und B.

Es wird nemlich aus

I) $\cos\alpha = \frac{\cos\beta + \cos B \sin\gamma \sin\alpha}{\cos\gamma}$

und II) $\cos\alpha = \cos\gamma \cos\beta + \cos A \sin\gamma \sin\beta$.

Also $\cos\gamma \cos\beta + \cos A \sin\gamma \sin\beta = \frac{\cos\beta - \cos B \sin\gamma \sin\alpha}{\cos\gamma}$

oder $\cos\gamma^2 \cos\beta + \cos A \sin\gamma \cos\gamma \sin\beta = \cos\beta - \cos B \sin\gamma \sin\alpha$,

oder $\cos A \sin\gamma \cos\gamma \sin B = \cos\beta \sin\gamma^2 - \cos B \sin\gamma \sin\alpha$,

also $\cos A \cos\gamma \sin\beta = \cos\beta \sin\gamma - \cos B \sin\alpha$.

Nun

Nun setze man $\sin\alpha = \frac{\sin\beta \sin A}{\sin B}$, so hat man

$\cos A \cos\gamma \sin\beta = \cos\beta \sin\gamma - \sin\beta \sin A \cot B$.

Also $\cot B = \frac{\cos\beta \sin\gamma - \cos A \cos\gamma \sin\beta}{\sin\beta \sin A}$,

und $\tang B = \frac{\sin\beta \sin A}{\cos\beta \sin\gamma - \cos A \cos\gamma \sin\beta}$,

d. i. $\tang B = \frac{\sin AC \sin A}{\cos AC \sin AB - \cos A \cos AB \sin AC}$.

II. Aufl. Aus des dritten Winkels C Spitze sey der Bogen CD auf AB senkrecht gezogen, so hat man im rechtwinklichten Dreyeck ADC die Hypothenuse AC nebst dem anliegenden Winkel A, woraus AD nach der Proportion gefunden wird

$r : \cos A = \tang AC : \tang AD$ (537 §)

wo AD größer, als 90° zu nehmen ist, nachdem von A und AC nur eins kleiner, das andre größer ist als 90°, im Gegentheil aber ist AD < 90°.

Ferner wird BD = BA − AD, also BD negativ, wenn AD > BA, und nun erhält man den Winkel B aus der Proportion $\sin BD : \sin AD = \tang A : \tang CBD$ (541 §), wo A und CBD allemahl von einerley Art sind. Wenn aber AD > AB, so ist eigentlich CBA, der gesuchte Winkel, des vorigen CBD Ergänzung zu 180°; und man weis auch aus dem 540 §, daß in diesem Fall A und CBA von verschiedener Art seyn müssen.

205 F.

212 213 F.

552 §.

Es sind zweene Winkel gegeben, und eine Seite,

Seite, die zwischen den beyden Winkeln liegt, man soll den dritten Winkel finden (543 §. n. I. litt. α.)

I. Aufl. Wenn A, B, AB gegeben sind, und man sucht C: so hat man die Gleichung $\cos AB = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$ (548 §). Hieraus folgt $\cos C = \sin A \sin B \cos AB - \cos A \cos B$.

II. Aufl. Wenn man aus B auf AC den Bogen BD senkrecht setzt, so erhält man statt des Winkels B zweene andre, ABD, CBD, und es wird CBD = CBA − ABD. Den Winkel ABD giebt die Proportion

$$\cot A : r = \cos AB : \cot ABD \text{ (536 §).}$$

Ferner hat man

$$\sin ABD : \sin CBD = \cos A : \cos BCD \text{ (542 §)}$$

wo A und BCD wiederum allemahl von einerley Art sind, nur in dem Fall, wenn ABD > CBA, wird eigentlich ACB = 180° − BCD gesucht. 213 F.

553 §.

Es ist wiederum eine Seite nebst den beyden anliegenden Winkeln gegeben: man sucht eine von den übrigen Seiten (543 §. n. II. litt. a.)

I. Aufl. Wenn wiederum A, B, und AB = γ gegeben sind, und BC = α gesucht wird: so hat man folgende drey Gleichungen: 212 213 F.

I) $\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$

II) $\cos \gamma = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$ (542 §).

III)

III) $\sin C = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin \alpha}$ (538 §)

wo $BC = \alpha$ ist, wie im 551 §. Aus diesen Gleichungen schaffe man $\cos C$, und $\sin C$ weg: so erhält man eine Gleichung zwischen A, B, α und γ. Es wird aber

I) $\cos C = \frac{\cos \alpha \sin B \sin C - \cos A}{\cos B}$,

II) $\cos C = \cos \gamma \sin A \sin B - \cos A \cos B$,

also $\frac{\cos \alpha \sin B \sin C - \cos A}{\cos B} = \cos \gamma \sin A \sin B - \cos A \cos B$.

Hieraus folgt,

$\cos \alpha \sin B \sin C - \cos A = \cos \gamma \sin A \sin B \cos B - \cos A \cos B^2$

$\cos \alpha \sin B \sin C = \cos \gamma \sin A \sin B \cos B + \cos A \sin B^2$,

oder $\cos \alpha \sin C = \cos \gamma \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

Nun setze man $\sin C = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin \alpha}$, so wird

$\cot \alpha \sin A \sin \gamma = \cos \gamma \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

und $\cot \alpha = \frac{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos \gamma}{\sin A \sin \gamma}$,

oder $\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin A \sin \gamma}{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos \gamma}$.

II. Aufl. Es sey der Bogen BD auf die dritte Seite AC senkrecht, so hat man

$\cot A : r = \cos AB : \cot ABD$ (536 §).

Ferner $CBD = CBA - ABD$, und $\cos CBD : \cos ABD = \operatorname{tang} AB : \operatorname{tang} BC$ (541 §). Wenn BD und CD,

folglich

folglich A und CBD (528 §) von einerley Art sind: so ist BC < 90°, widrigenfalls aber größer als 90° (531 §).

554 §.

Es sind zwo Seiten gegeben, und ein Winkel, der einer Seite entgegensteht; man soll die dritte finden (543 §. n. II. litt. β.)

I. Aufl. Wenn $BC = \alpha$, $AC = \beta$, und A gegeben sind; und man sucht $AB = \gamma$: so kan man allemahl auch B als gegeben ansehen, weil $\sin B = \frac{\sin A \sin \beta}{\sin \alpha}$.

Nun hat man aus dem 551 §

$$\text{I) } \operatorname{tang} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \sin \beta}{\cos \beta \sin \gamma - \cos A \cos \gamma \sin \beta},$$

$$\text{II) } \operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \gamma - \cos B \cos \gamma \sin \alpha}.$$

Hieraus folgt

I) $\sin B \cos \beta \sin \gamma - \sin B \cos A \cos \gamma \sin \beta = \sin A \sin \beta \cos B$,

II) $\sin A \cos \alpha \sin \gamma - \sin A \cos B \cos \gamma \sin \alpha = \sin B \sin \alpha \cos A$.

Man multiplicire die erste Gleichung mit cosA, die zwote mit cosB, und subtrahire die letzte von der ersten: so wird $\cos A \sin B \cos \beta \sin \gamma - \cos B \sin A \cos \alpha \sin \gamma + \sin A \cos B^2 \cos \gamma \sin \alpha - \sin B \cos A^2 \cos \gamma \sin \beta = (\sin A \sin \beta - \sin B \sin \alpha) \cos A \cos B = 0$, weil $\sin A \sin \beta = \sin B \sin \alpha$ (539 §). Also ist

$$(\sin A \cos B^2 \sin \alpha = \sin \beta \cos A^2 \sin \beta) \cos \gamma = (\cos B \sin A \cos \alpha - \cos A \sin B \cos \beta) \sin \gamma.$$

Es wird aber der Factor $\sin A \cos B^2 \sin\alpha - \sin B \cos A^2 \sin\beta = \sin A \sin\alpha (1 - \sin B^2) - \sin B \sin\beta (1 - \sin A^2) = \sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta + \sin B \sin A (\sin A \sin\beta - \sin B \sin\alpha) = \sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta$, weil $\sin A \sin\beta - \sin B \sin\alpha = 0$. Demnach erhält man $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \tang\gamma = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta}{\cos B \sin A \cos\alpha - \cos A \sin B \cos\beta}$.

II. Aufl. Weil A, AC, und BC gegeben sind, so fälle man aus C auf AB den senkrechten Bogen CD, und man hat im rechtwinklichten Dreyeck CAD die Proportion $r : \cos A = \tang AC : \tang AD$ (537 §). Ferner $\cos AC : \cos BC = \cos AD : \cos BD$ (541 §). Aus AD und BD wird nun $AB = AD \pm DB$ gefunden. Dafern also $BC < AC$, folglich $DB < AD$ ist, so wird AB nicht bestimt, und man kan sowohl $AB = AD + DB$, als auch $Ab = AD - Db$ für die gesuchte Seite nehmen (514 §). Wäre aber $DB > AD$, so wird $AB = AD + DB$.

555 §.

Es sind zweene Winkel, und eine Seite gegeben die einem Winkel entgegen steht, man sucht den dritten Winkel (443 §. n. I. litt. β.)

I. Aufl. Es sey gegeben A, B, und α, man sucht C. In diesem Fall kan man wiederum β als gegeben ansehen, weil $\sin\beta = \frac{\sin\alpha \sin B}{\sin A}$. Es wird aber aus dem 548 §

I) $\cos\beta = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$.

II) $\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$

dies

dies giebt

I) $\sin A \sin C \cos\beta - \cos A \cos C = \cos B$

II) $\sin B \sin C \cos\alpha - \cos B \cos C = \cos A$

Die erste mit $\cos A$, die andre mit $\cos B$ multiplicirt, und die erste von der letzten subtrahirt, giebt

$(\sin B \cos B \cos\alpha - \sin A \cos A \cos\beta) \sin C +$
$(\cos A^2 - \cos B^2) \cos C = 0.$

Hieraus folgt,

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \text{tang } C = \frac{\cos B^2 - \cos A^2}{\sin B \cos B \cos\alpha - \sin A \cos A \cos\beta}$$

$$= \frac{\sin A^2 - \sin B^2}{\sin B \cos B \cos\alpha - \sin A \cos A \cos\beta}$$

$$\frac{(\sin A^2 : \sin B) - \sin B}{\cos B \cos\alpha - (\sin A : \sin B) \cos A \cos\beta}.$$

Da nun $\sin A : \sin B = \sin\alpha : \sin\beta$: so erhält man

$$\text{tang } C = \frac{(\sin A \sin\alpha : \sin\beta) - \sin B}{\cos B \cos\alpha - (\sin\alpha : \sin\beta) \cos A \cos\beta}, \text{ oder}$$

$$\text{tang } C = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta}{\cos B \cos\alpha \sin\beta - \cos A \sin\alpha \cos\beta}.$$

II. Aufl. Es sind A, B, und BC gegeben, man sucht C. In dieser Absicht sey der Bogen CD auf AB senkrecht, so wird CD innerhalb des Dreyecks fallen, wenn die Winkel A und B von einerley Art sind (540 §). Nun hat man im rechtwinklichten Dreyeck BCD die Proportion 204 205 F.

$\cot B : \cos BC = r : \cot BCD$ (536 §).

und überdem

$\cos B : \cos A = \sin BCD \sin ACD$ (542 §).

Wenn also B und A von einerley Art sind: so wird $C = ACD - BCD$.

556 §.

Es sind zwo Seiten gegeben, und ein Winkel, der einer Seite entgegen stehet, man soll den Winkel finden, den beyde Seiten einschliessen (543 §. n. I. litt. b.)

I. Aufl. Wenn α, β, B gegeben sind, und C gesucht wird: so kan man auch A als gegeben ansehen, weil $\sin A = \frac{\sin B \sin \alpha}{\sin \beta}$. Dann aber giebt die im vor. 555 § gefundene Gleichung die Auflösung eben dieser Aufgabe. Es ist nemlich

$$\text{tang } C = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta \cos B - \sin\beta \cos\alpha \cos A}.$$

204 II. Aufl. Weil A, AC, BC gegeben sind: so
205 sey CD auf AB senkrecht, und man hat im rechtwink-
F. lichten Dreyeck ADC

$$\cot A \cos : AC = r : \cot ACD \text{ (536 §).}$$

Hierauf schliest man weiter aus dem 542 §

$$\text{tang } BC : \text{tang } AC = \cos ACD : \cos BCD.$$

Wenn nun $BC < AC$ ist; so bleibt $C = ACD \pm BCD$ unbestimt. Aber wenn $BC > AC$ ist: so wird $C = ACD + BCD$.

557 §.

Es sind zweene Winkel gegeben, und eine Seite, die einem Winkel gegenüber stehet; man sucht die Seite zwischen den gegebenen Winkeln (543 §. n. I. litt. b.)

I. Aufl. Es sind gegeben A, B, und β, man sucht

sucht γ. Weil $\sin\alpha = \frac{\sin\beta \sin A}{\sin B}$: so sieht man auch hier die Seite α als gegeben an, und dann ist aus dem 554 §

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta}{\sin A \cos B \cos\alpha - \cos A \sin B \cos\beta},$$

II. Aufl. Weil A, B, und AC gegeben sind: so sey CD auf AB senkrecht, und man hat

$r : \cos A = \text{tang}\,AC : \text{tang}\,AD$ (537 §).

Ferner

$\text{tang}\,B : \text{tang}\,A = \sin AD : \sin BD$ (541 §).

Nachdem nun A und B von einerley, oder verschiedener Art sind; nachdem wird $AB = AD + BD$, oder $AB = AD - DB$ (540 §).

Der XXV. Abschnitt.

Allgemeine Theorie von den eckigten Körpern.

558 §.

Ein Körper, der von lauter ebenen Flächen auf allen Seiten eingeschlossen ist, heist ein eckigter Körper. Alle diese Ebenen werden sich in graden Linien durchschneiden, welche die Seitenlinien des Körpers abgeben. Auf der Oberfläche eines solchen Körpers muß es Puncte geben, durch welche mehr, als zwo Seitenflächen geführt sind (299 §). Dies werden die Spitzen körperlicher Ecken auf der Ober-

fläche des Körpers, daher er den Nahmen eines eckigten führt.

559 §.

Die Anzahl aller Winkel auf der Oberfläche eines eckigten Körpers ist wenigstens dreymahl so groß, als die Anzahl aller Ecken des Körpers. Denn zu jeder Ecke gehören wenigstens drey Winkel als Seitenflächen. Ist also die Anzahl der Winkel $=w$, die Anzahl der Ecken $=a$, so ist w nie kleiner, als $3a$, aber $w=2l$, wenn l die Anzahl der Seitenlinien ist (301 §), also $2l$ nie kleiner als $3a$.

560 §.

Ein Körper kan nicht weniger als vier Ecken haben. Denn drey Ebenen können zwar eine Ecke; aber noch keinen Körper einschliessen (299 §). Es muß wenigstens eine vierte Ebene hinzu kommen, welche alle drey Seitenflächen dieser Ecke, und zugleich alle drey Seitenlinien derselben schneidet. Auf solche Art ergiebt sich an jeder Seitenlinie eine Ecke, und also erhält man mit der ersten zusammen in allen vier dreyseitige Ecken, und der Körper, welcher auf solche Art herausgebracht wird, ist eine dreyseitige Pyramide.

561 §.

In einer jeden Pyramide ist die Anzahl der Seitenlinien zweymahl so groß, als die Anzahl der Seitenlinien der Grundfläche. Denn es geht von der Spitze eines jeden Winkels der Grundfläche eine Seitenlinie der Pyramide bis zu ihrer Spitze, und die Grundlinie hat so viel Winkel, als Seitenlinien (31 §).

Die

Die Anzahl der Seitenflächen, (die Grundfläche mit gerechnet, welche in der Folge als eine Seitenfläche allemahl mit verstanden wird) ist in jeder Pyramide eben so groß, als die Anzahl der Ecken, nemlich um eins größer, als die Anzahl der Seitenlinien oder Winkel der Grundfläche. Es liegt nemlich an jedem Winkel der Grundfläche eine Ecke, und hiezu komt die Ecke von der Spitze der Pyramide.

Wenn also die Anzahl der Ecken $=a$, der Seitenflächen $=h$, der Seitenlinien $=l$, und die Anzahl der Seitenlinien der Grundfläche $=m$ gesetzt wird: so ist $a=m+1$, $h=m+1$, also $a+h=2m+2$. Aber $l=2m$, also $a+h=l+2$, und $l=a+h-2$.

562 §.

Wenn man an der Pyramide ABCDEF eine andre ADEGH so anlegt, daß ein paar Seitenflächen dieser Pyramiden in ADE zusammen fallen, so behält der dadurch zu Stande gebrachte Körper ABCDHGEF eben die Eigenschaft, daß $l=a+h-2$ ist. Denn ist m die Anzahl der Seiten der Grundfläche DEGH, so kommen hiedurch $2m$ Seitenlinien zu der vorigen Anzahl hinzu, und es werden die drey Seitenlinien der gemeinschaftlichen Seitenfläche ADE nur einmahl gezählt. Also kommen eigentlich $2m-3$ Seitenlinien hinzu. Da ADEGH $m+1$ körperliche Ecken hat, so würden $m+1$ Ecken hinzu kommen, wenn nicht wieder bey A, D, E aus zwoen Ecken nur eine würde, also wächst a um $m+1-3$ Ecken. So würden auch $m+1$ Seitenflächen hinzu kommen, wenn nicht die beyden gemeinschaftlichen Seitenflächen ADE abgiengen. Demnach wächst h um $m+1-2$ Seitenflächen. Es ist aber $2m-3$ 215 F.

$= m+1-3+m+1-2$, und in der Pyramide ABCDEF ist $l = a+h-2$ (560§), also wird $l+2m-3 = (a+m+1-3)+(h+m+1-2)-2$. Wenn also $l+2m-3 = L$, $a+m+1-3 = A$, $h+m+1-2 = H$ gesetzt wird: so bleibt für den herausgebrachten Körper $L = A+H-2$.

563 §.

Man setze an dem Körper ABCDHGEF noch eine Pyramide AFEGI an, deren Grundfläche m Seitenlinien hat, so daß zwey Paar an einander liegender Seitenflächen in beyden Körpern in AEF und AEG zusammen fallen: so bleibt wiederum in dem neuen Körper die vorige Eigenschaft. Es kommen nemlich $2m-2 \times 3$ Seitenlinien, $m+1-(2+2)$ Ecken, und $m+1-2 \times 2$ Seitenflächen hinzu. Wenn AFEGI mit dem vorigen Körper drey Seitenflächen gemein hätte, so würden $2m-3 \times 3$ Seitenlinien, $m+1-(3+2)$ Ecken, und $m+1-3 \times 2$ Seitenflächen hinzu kommen.

Hätte AFEGI mit dem vorigen Körper überhaupt n Seitenflächen gemein: so würden $2m-n \times 3$ Seitenlinien, $m+1-(n+2)$ Ecken, und $m+1-n \times 2$ Seitenflächen hinzu kommen. Weil nun $2m-3n = m+1-(n+2)+m+1-2n$: so ist $L+2m-3n = (A+m+1-(n+2))+(H+m+1-2n)-2$, wenn vorher $L = A+H-2$ war.

Demnach bleibt in jedem Körper diese Eigenschaft, wenn man ihn aus mehrern Pyramiden dergestalt zusammensetzt, daß ihre Spitzen und so viel Seitenflächen, als man will, zusammen fallen.

564 §.

564 §.

Wenn ABCDHGIF ein eckigter Körper ist, der die Eigenschaft hat, daß $l=a+h-2$; und man trennet von ihm eine Pyramide AFEGI, deren Grundfläche FEGI mit einer Seitenfläche des Körpers einerley ist, und deren Spitze in die Spitze einer gegenüberstehenden Ecke fällt; so ist für den übrig bleibenden Körper ABCDHGEF ebenfalls $l=a+h-2$. Denn dafern m die Anzahl der Seitenlinien von der Grundfläche der abgetrennten Pyramide, und n die Anzahl der Seitenflächen ist, welche diese Pyramide mit dem übrigbleibenden Stück gemein hat: so erhält man nun $2m-3n$ Seitenlinien, $m+1-(n+2)$ Ecken, und $m+1-2n$ Seitenflächen weniger, als vorhin, und es bleibt $l-(2m-3n)=a-(m+1-(n+2))+h-(m+1-2n)-2$.

565 §.

In jedem eckigten Körper ist die Anzahl der Ecken und Seitenflächen zusammen um zwey größer, als die Anzahl der Seitenlinien.

Beweis. Wenn der Körper BCDEFGHI keine andre, als auswärts gehende Ecken hat, so kan man in seinem inwendigen Raum einen Punct A annehmen, und nach allen Ecken-Spitzen die graden Linien AB, AC, AD, u. s. f. ziehen, so daß diese ganz in den inwendigen Raum des Körpers fallen. Hiedurch wird der Körper in so viel Pyramiden ABCDE, ABCGH u. s. f. getheilt, als er Seitenflächen hat, die A zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und so, wie im 563 § zusammengesetzt sind. Also hat der ganze Körper die Eigenschaft, daß $l=a+h-2$ ist.

Wenn unter den Flächen-Winkeln des Körpers einwärtsgehende sind; so kan man den Punct A zuweilen so nicht annehmen, daß alle grade Linien von A bis an die Spitze der Ecken des Körpers ganz in den inwendigen Raum desselben fallen. In diesem Fall aber kan man den 564 § mit dem vorigen Beweise verbinden. Hätte der Körper ABCDEFGHI eine einwärtsgehende Ecke bey A, wovon die Seitenlinien AB, AC, AD, AE u. s. f. sind, und die Puncte B, C, D, E u. s. f., sind mit graden Linien BD, u. s. f. zusammengezogen: so werden die Ebenen der Dreyecke CBD, BDE, u. s. f., wenigstens nicht so grosse einwärts gehende Flächen-Winkel einschliessen, als die Seitenflächen der einwärts gehenden Ecke bey A, einschliessen. Wenn demnach der Körper auch mehr einwärts gehende Ecken hätte: so könte man mit einer jeden eben so umgehen, und auf solche Art einen Körper zu Wege bringen, auf welchen sich der vorige Beweis anwenden läst. Man trenne nun von dem Körper nach und nach wieder die Pyramiden BCDA, BEDA, u. s. f.: so behält das übrig bleibende Stück die Eigenschaft, daß $l = a + h - 2$ sey (564 §).

566 §.

Es ist nie $2l < 3h$ (300 §), aber $h = l - a + 2$, also ist nie $2l < 3l - 3a + 6$, folglich ist nie $3a \leqq l + 6$, oder $a < \frac{1}{3}l + 2$.

Ferner ist auch nie $2l < 3a$ (559), und $a = l = h + 2$, folglich auch nie $3h < l + 6$, oder $h < \frac{1}{3}l + 2$.

Wenn man $a + h - 2$ statt l setzt, so folgt aus dem ersten Satz, es sey nie $2a < h + 4$ oder $a < \frac{1}{2}h + 2$, und aus dem zweyten Satz, es sey nie $2h < a + 4$, oder $h < \frac{1}{2}a + 2$.

Dem-

Demnach ist auch niemahls $h > 2a - 4$; so wie nie $a > 2h - 4$ seyn kan.

567 §.

Dafern von den dreyen Zahlen a, h, l, zwo gegeben werden, so ist die dritte bestimt. Aber es können auch nicht jede zwo von diesen Zahlen willkührlich angenommen werden, wie die jetzt erwiesenen Sätze ergeben. Es bestimt jedesmahl eine dieser Zahlen die Grenzen, zwischen welchen die andre fallen muß.

Folgende Tafel dienet, alle Fälle kurz zu übersehen.

Es sey gegeben	so fällt	zwischen den Grenzen
l	h	$\frac{2}{3}l$ und $\frac{1}{3}l+2$
	a	$\frac{2}{3}l$ und $\frac{1}{3}l+2$
h	l	$3h-6$ und $\frac{3}{2}h$
	a	$2h-4$ und $\frac{1}{2}h+2$
a	l	$3a-6$ und $\frac{3}{2}a$
	h	$2a-4$ und $\frac{1}{2}a+2$

Diese Tafel giebt die kleinsten und grösten Werthe, die für die beyden übrigen Zahlen statt haben können, wenn eine von den dreyen Zahlen l, h, a, bestimt ist. Uebrigens aber ist zu merken, daß diese drey Zahlen allemahl ganze Zahlen seyn müssen. Wenn also die gefundenen Grenzen Brüche sind, so können nur diejenigen ganzen Zahlen statt haben, die zwischen diesen Grenzen fallen, da sonst diese Grenzen selbst, dafern sie ganze Zahlen sind, auch mit unter die möglichen Fälle gehören.

568 §.

Kein eckigter Körper kan weniger, als 6 Seiten-

linien

linien haben. Denn es muß wenigstens $h=4$ seyn (299 §), und dann fällt l zwischen den Grenzen 6 und 6, also ist in diesem Fall $l=6$. Uebrigens können für l alle übrige Zahlen, die größer als 6 sind, angenommen werden, die einzige Zahl 7 ausgenommen. Wäre nemlich $l=7$, so müsten h und a zwischen den Grenzen $4\frac{2}{3}$ und $4\frac{1}{3}$ fallen. Aber zwischen diese Grenzen fällt keine ganze Zahl, also kan die Voraussetzung $l=7$ nicht statt haben.

569 §.

Kein eckigter Körper kan von lauter solchen Seitenflächen begränzt seyn, die sechs oder mehr Seitenlinien haben.

Auch können nicht alle Ecken des Körpers von sechs oder mehr Seitenflächen eingeschlossen seyn.

Beweis des 1 S. Hätten alle Seitenflächen 6 oder mehr Seitenlinien, so wäre entweder $w=6h$, oder $w>6h$, wenn w die Anzahl aller Winkel bedeutet (301 §). Nun ist $l=\frac{1}{2}w$ (301 §), also wäre entweder $l=3h$, oder $l>3h$. Aber l fällt allemahl zwischen den Grenzen $\frac{3}{2}h$ und $3h-6$, (567 §). Deswegen kan nie $l=3h$ oder $l>3h$ seyn.

Beweis des 2 S. Wenn alle Ecken des Körpers 6 oder mehr Seitenflächen hätten, so wäre $w=6a$, oder $w>6a$. Da nun $l=\frac{1}{2}w$, so wäre entweder $l=3a$, oder $l>3a$, welches wiederum nicht seyn kan, weil l zwischen den Grenzen $\frac{3}{2}a$ und $3a-6$ fallen muß (567 §).

570 §.

Die Summe aller Winkel auf der Oberfläche eines jeden eckigten Körpers beträgt $(4a-8)R$,

$(4a-8)R$, wenn R einen rechten Winkel, und a die Anzahl aller Ecken des Körpers bedeutet.

Beweis. Es sey λ die Anzahl aller Seitenlinien aller Seitenflächen, und l die Anzahl der Seitenlinien des Körpers; so ist $\lambda = 2l$. Aber die Summe aller Winkel, die zu einer Seitenfläche gehören, beträgt zweymahl soviel rechte Winkel, als diese Seitenfläche Seitenlinien hat, weniger vier rechte Winkel (89 §). Nun mag der Körper so viel Seitenflächen haben, als er wolle, so nehme man an, daß die Buchstaben α, β, γ, δ, u. s. f. die Anzahl der Seitenlinien bedeuten, die zur Isten, IIten, IIIten, IVten, Seitenfläche u. s. f. gehören, so hat man für diese Seitenflächen nach der Ordnung folgende Summen der dazu gehörigen Winkel

Für die Iste	$2\alpha . R - 4R$
Für die IIte	$2\beta . R - 4R$
Für die IIIte	$2\gamma . R - 4R$
Für die IVte	$2\delta . R - 4R$
u. s. f.	

Ist nun h die Anzahl der Seitenflächen des Körpers, so wird die Summe aller Winkel $= 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta \text{ etc}) R - 4h.R$. Es ist aber $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.} = \lambda$, also die Summe aller Winkel $= 2\lambda . R - 4h.R$. Nun ist $\lambda = 2l$; setzt man also diese Summe $= S$, so wird $S = 4(l-h)R$. Ferner wird vermöge des 565 § $l-h = a-2$, folglich $S = (4a-8)R$.

571 §.

Es kan die Summe aller Winkel nie kleiner, als $2h.R$, und nie größer, als $(8h-24)R$ seyn.

Beweis.

Beweis. Es ist nie $l < \frac{2}{2}h$ (567 §), also nie $l-h < \frac{3}{2}h-h$, folglich ist auch nie $4(l-h) < 2h$. Da nun $S = 4(l-h)R$ (570 §), so ist nie $S < 2h.R$. Ferner ist nie $l > 3h-6$ (567 §), also nie $l-h > 2h-6$, folglich auch nie $4(l-h) > 8h-24$, und eben deswegen kan niemahls $S > (8h-24)R$ seyn.

572 §.

In der ebenen Geometrie lassen sich die gradlinichten Figuren ohne Schwierigkeit in Klassen eintheilen, und der Grund der Eintheilung ward aus der Anzahl der Seitenlinien oder der Winkel hergenommen, indem hier die Anzahl der Seitenlinien und der Winkel allemahl einerley war. Will man die eckigten Körper in Klassen eintheilen, so kan der Grund der Eintheilung entweder aus der Anzahl der Seitenflächen, oder der Ecken, oder der Seitenlinien hergenommen werden. Aber zu jeder Hauptklasse werden alsdenn mehr besondre Arten gehören, weil wenn eine von diesen Zahlen bestimt ist, für die übrigen beyden noch verschiedene Bestimmungen möglich bleiben. Die Anzahl der Seitenflächen bestimt noch nicht die Anzahl der Ecken, beyde Zahlen zusammen aber bestimmen die Anzahl der Seitenlinien. Daher kan man jedem eckigten Körper füglich einen solchen Nahmen geben, der beydes zugleich die Anzahl der Ecken und Seitenflächen ausdrückt. Der Körper heist ein Tetraedrum, Pentaedrum, Hexaedrum, Heptaedrum, u. s. f. nachdem er von vier, fünf, sechs, sieben Seitenflächen eingeschlossen ist; und von der Anzahl der Ecken kan er die Nahmen Tetragonum, Pentagonum, Hexagonum, Heptagonum, u. s. f. führen. Demnach wäre ein Hexaedrum

drum pentagonum ein solcher Körper, der sechs Seitenflächen und fünf Ecken hat. Man setze nach einander $h=4$, $h=5$, $h=6$, u. s. f. so weiß man, daß für jede dieser Bestimmungen die Anzahl der Ecken a nicht ausser den Grenzen $2h-4$ und $\frac{1}{2}h+2$ falle. Eine Tafel, welche die möglichen Arten der eckigten Körper vorstellig machen sollte, würde man also folgendergestalt einrichten können.

Anzahl der Seitenflächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Seitenlinien	Nahmen der Cörper
4	4	6	TETRAEDRUM tetragonum
5	5	8	PENTAEDRUM pentagonum
	6	9	- - hexagonum
6	5	9	HEXAEDRUM pentagonum
	6	10	- - hexagonum
	7	11	- - heptagonum
	8	12	- - octogonum
7	6	11	HEPTAEDRUM hexagonum
	7	12	- - heptagonum
	8	13	- - octogonum
	9	14	- - enneagonum
	10	15	- - decagonum

u. s. f.

Diese bisher ausgeführte allgemeine Theorie von den eckigten Körpern gehört zu denjenigen Erweiterungen der Geometrie, womit Hr. Euler diese Wissenschaft in zwoen Abhandlungen bereichert hat, die man unter dem Titel: Elementa doctrinæ solidorum, und Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt prædita, im IV Tomo der Nov. Comment. Petrop. 109 u. f. S. antrift.

573 §.

573 §.

Wenn alle Seitenflächen eines eckigten Körpers gleiche und ähnliche reguläre Figuren, und alle Ecken desselben einander gleich und ähnlich sind; so heist er ein regulärer, sonst aber ein irregulärer Körper.

Es ist kein Körper möglich, der lauter einwärts gehende Flächenwinkel hätte. Also muß ein regulärer Körper lauter auswärts gehende Flächenwinkel haben.

574 §.

Wenn die Seitenflächen des regulären Körpers gleichseitige Dreyecke, und seine Ecken dreyseitige seyn sollen; so muß der Körper vier Seitenflächen haben.

Beweis. Zu jeder Seitenfläche gehören drey Winkel, und zu jeder Ecke ebenfalls. Nun sey w die Anzahl der Winkel, a der Ecken, h der Seitenflächen, und l der Seitenlinien: so muß $w=3a$, und $w=3h$, also $a=h$ seyn. Da nun $l=a+h-2$ ist (565 §): so wird $l=2h-2$. Zu jeder Seitenfläche gehören drey Seitenlinien, und die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers ist halb so groß (300 §). Deswegen wird $l=\frac{3h}{2}$, also $\frac{3}{2}h=2h-2$, und dies giebt $h=4$.

575 §.

Wenn die Seitenflächen Dreyecke bleiben, und jede Ecke vier Seitenflächen haben soll: so bekomt der Körper acht Seitenflächen.

Beweis. Es bleibt $w=3h$, und es soll $w=4a$ seyn, also ist $3h=4a$, oder $a=\frac{3}{4}h$. Dies giebt $l=\frac{3}{4}h+h-2$, oder $4l=7h-8$. Weil nun auch $l=\frac{3}{2}h$: so wird $6h=7h-8$, oder $h=8$.

576 §.

576 §.

Wenn die Seitenflächen Dreyecke bleiben, und die Ecken fünf Seitenflächen haben sollen: so bekomt der Körper 20 Seitenflächen.

Beweis. Es bleibt noch $w = 3h$, und es soll $w = 5a$ seyn, also wird $a = \frac{3}{5}h$, und $l = \frac{3}{5}h + h - 2$, oder $5l = 8h - 10$. Ueberdem bleibt $l = \frac{3}{2}h$, also ist $\frac{15}{2}h = 8h - 10$, oder $15h = 16h - 20$, und $h = 20$.

577 §.

Es sind nicht mehr, als dreyerley Arten regulärer Körper möglich, deren Seitenflächen Dreyecke sind.

Beweis. Die Ecken eines solchen Körpers können dreyseitige, vierseitige, fünfseitige seyn, und im ersten Fall ist es ein Tetraëdrum im zweyten ein Octaëdrum, im dritten ein Icosaëdrum (574. 575. 576 §). Mehr als fünf Seiten können die Ecken des Körpers nicht haben. Denn die Größe jeder Seite beträgt 60°, also würden 6 Seiten schon 360°, und mehr als 6 Seiten allemahl über 360° betragen, und solche Ecken giebt es nicht, wenn jeder von ihren Winkeln kleiner, als 180° seyn soll, wie hier erfordert wird (509 §). Eben dieser Satz folgt auch aus dem 569 §.

578 §.

Wenn die Seitenflächen des regulären Körpers Quadrate sind: so kan jede Ecke nicht mehr, als drey Seitenflächen haben, und der ganze Körper hat sechs Seitenflächen.

Beweis. Jeder Winkel eines Quadrats ist $=90°$. Also betragen ihrer vier schon $360°$, und mehr, als 4, allemahl mehr, als $360°$. Deswegen kan keine Ecke mehr, als drey Seiten haben. Nun hat man $w=4h$, und $w=3a$, also $a=\frac{4}{3}h$, und $l=\frac{4}{3}h+h-2$, oder $3l=7h-6$. Ueberdem ist $l=\frac{4}{2}h=2h$, also $3.2h=6h=7h-6$, oder $h=6$.

579 §.

Wenn die Seitenflächen reguläre Fünfecke sind: so kan jede Ecke wiederum nicht mehr, als 3 Seiten haben, und der ganze Körper hat zwölf Seitenflächen.

Beweis. Jeder Winkel des regulären Fünfecks ist $>90°$, also ihrer vier, und noch mehr, allemahl über $360°$. Deswegen kan keine Ecke mehr, als drey Seiten bekommen. Uebrigens ist $w=5h$, und $w=3a$, also $a=\frac{5}{3}h$. Ferner $l=\frac{5}{3}h+h-2$, oder $3l=8h-6$, und $l=\frac{5}{2}h$, also $1\frac{5}{2}h=8h-6$, oder $15h=16h-12$, und $h=12$.

580 §.

Mehr als fünf Seitenlinien können die Seitenflächen eines regulären Körpers nicht haben.

Beweis. Im regulären Sechseck ist jeder Winkel $=120°$, und wenn die Anzahl der Seiten grösser, als 6 ist; so ist der Polygonwinkel größer, als $120°$. Aber es ist schon $3\times 120°=360°$, und drey Winkel eines jeden Polygons, das mehr, als 6 Seiten hat, betragen über $360°$, also kan daraus gar keine Ecke gemacht werden. Folglich kan man aus Sechsecken, und solchen Polygonen, die mehr,

als 6 Seitenlinien haben, keinen regulären Körper zusammensetzen. Eben dies folgt aus dem 569 §.

Demnach sind überhaupt nicht mehr, als fünf reguläre Körper möglich (577. 578. 579 §), die auch die Platonischen Körper von ihrem Erfinder heissen.

Der XXVI. Abschnitt.

Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts und der Oberfläche der Prismen, Pyramiden, und der regulären Körper.

581 §.

Die Oberfläche eines eckigten Körpers ist aus ebenen gradlinichten Figuren, die sich unter gewissen Winkeln schneiden, zusammengesetzt. Eine solche Oberfläche kan eine gebrochne Fläche heissen. Da man nun den Inhalt einer jeden ebenen gradlinichten Figur nach den Regeln des XI und XVIII Abschnitts finden kan; so läst sich die Oberfläche eines jeden eckigten Körpers nach eben diesen Regeln berechnen. Wenn nemlich alle Seitenlinien des Körpers, und die Winkel seiner Seitenflächen bekant sind: so kan man jede Seitenfläche besonders berechnen, und zuletzt alles in eine Summe bringen. Hiebey lassen sich aber, nachdem die Körper mehr, oder weniger regulär sind, verschiedene Rechnungs-

Vortheile anbringen, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden.

582 §.

217 F. Wenn die drey Seitenlinien $AB=a$, $AD=b$, $AE=c$ die in einer Ecke A des Parallelepipedi AG zusammenstossen, nebst den Seiten dieser Ecke $BAD=\alpha$, $BAE=\beta$, $EAD=\gamma$ gegeben sind: die Oberfläche nebst dem körperlichen Inhalt des Parallelepipedi zu finden.

Aufl. Es ist die Seitenfläche $AC=ab$, $\sin\alpha = EG$, die Seitenfläche $AF=ac\sin\beta$, die Seitenfläche $AH=bc\sin\gamma$, also die ganze Oberfläche $=2(ab\sin\alpha+ac\sin\beta+bc\sin\gamma)$. Ferner sey ER auf der Grundlinie AC senkrecht: so ist des Winkels an AB Cosinus $=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$, und der Sinus seiner Hälfte $=r\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$ (546 §). Es sey dieser Winkel $=\psi$: so findet man $\sin EAR=\sin\psi\sin\beta$ (523 §), also die Höhe des Körpers $ER=c\sin EAR=c\sin\psi\sin\beta$, und der Inhalt ist $=abc\sin\alpha\sin\beta\sin\psi$.

583 §.

218 F. Den Inhalt, und die Oberfläche eines dreyseitigen Prisma $ABDEFH$ zu finden, wenn die drey Seitenlinien der Ecke um A, nebst ihren Seitenflächen gegeben sind.

Aufl. Wenn die Bezeichnungen des vor. § bleiben, so ist der Inhalt $=\frac{1}{2}abc\sin\alpha\sin\beta\sin\psi$ (343 §). Um die Oberfläche zu finden, muß man die Seitenlinie $BD=e$, und den Winkel $DBF=\vartheta$ zuförderst berech-

berechnen. Man findet aber $BD = \sqrt{(aa - 2abcos\alpha + bb)}$ (466 §). Ferner ist tang $ABD = \frac{b \sin\alpha}{a - b\cos\alpha}$, also hat man $ABD = \eta$, und es ist in dem körperlichen Dreyeck an B, dessen Seitenlinien BA, BD, BF sind, der Winkel an $AB = \psi$ bekant, nebst den Seiten, die ihn einschliessen, η und $180° - \beta$, woraus $DBF = \vartheta$ nach dem 550 § berechnet wird. Weil nun das Dreyeck $ABD = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$, $AF = ac \sin\beta$, $AH = bc \sin\gamma$, und $DF = ec \sin\vartheta$; so ist die Oberfläche $= ab \sin\alpha + ac \sin\beta + bc \sin\gamma + ec \sin\vartheta = a(b \sin\alpha + c \sin\beta) + c(b \sin\gamma + e \sin\vartheta)$.

584 §.

Den Inhalt und die Oberfläche eines vielseitigen Prisma zu finden, wenn die drey Seitenlinien und Seitenflächen einer Ecke um *A*, nebst den Winkeln und übrigen Seiten der Grundfläche gegeben sind. 218 F.

Aufl. Aus den Winkeln und Seiten der Grundfläche berechnet man ihren Inhalt nach dem 461 §. Wenn die Bezeichnungen des vor. § bleiben, so wird die Höhe $ER = c \sin\psi \sin\beta$, und der Inhalt $= hh.c \sin\psi \sin\beta$, wenn *hh* der Inhalt der Grundfläche ist (349 §). Um die Oberfläche zu finden, muß man zuförderst die Winkel der übrigen Seitenflächen suchen. Man fängt damit an, daß man zuerst den Flächenwinkel an AB sucht, aus α, β, γ, wie im 546 §. Wenn nun dieser $= \psi$ ist: so findet man aus $ABF = 180° - \beta$, aus ABC, und dem eingeschlossenen Winkel ψ den Winkel FBC, und den Neigungswinkel an $BC = \eta$. Hierauf wird aus η und den beyden anliegenden Winkeln $GCB = 180°$

—FBC, und BCI, ferner der Winkel GCI nebst dem Neigungswinkel an CI gefunden. Auf solche Art kan man durch den ganzen Umfang des Prisma fortgehen, und die Winkel für jede Seitenfläche finden. Daraus ergiebt sich der Inhalt jeder Seitenfläche nach dem 460 §, und ihre Summe zur doppelten Grundfläche addirt giebt die ganze Oberfläche des Prisma.

Wenn $\beta = \gamma = 90°$, und also das Prisma ein senkrechtes ist: so wird die Oberfläche, die Grundfläche mitgerechnet, = (AB+BC+CI+DI etc.) AE. Also ist die Oberfläche eines senkrechten Prisma, die Grundflächen abgerechnet, so groß, als ein Rechteck, davon eine Seite der Höhe, die andre aber dem Umfange der Grundfläche des Prisma gleich ist.

585 §.

219 F. Den Inhalt, und die Oberfläche einer Pyramide *ABCDEF* zu finden, wenn die Seiten und Winkel der Grundfläche nebst den dreyen Seitenlinien *BC*, *BF*, *BA*, und Seitenflächen *ABC*, *ABF* einer Ecke *B* an der Grundfläche gegeben sind.

Aufl. Aus den Seiten und Winkeln der Grundfläche findet man ihren Inhalt nach dem 474 §. Dieser sey = *hh*. Wenn nun CBF = α, ABC = β, ABF = γ ist: so findet man den Flächen-Winkel ψ an BC wie im 584 § beym Prisma. Ist nun AG die Höhe, so wird ABG, und AG aus ψ und ABC ebenfalls wie im 584 § beym Prisma gefunden, und sodann hat man den Inhalt = $\frac{1}{3}$ *hh*. AG (360 §). Aus dem Winkel ABC, AB und BC hat man den Inhalt des

Drey-

Dreyecks ABC $= \frac{1}{2}$BC. AB sinβ. Aus AB, BC und ABC $= \alpha$ findet man überdem BCA, und AC, da denn ferner aus BCA, ψ, und BCD der Winkel ACD nebst dem Flächenwinkel an CD $= \eta$, gefunden wird. Aber aus ACD, AC, und CD giebt sich der Inhalt des Dreyecks ACD, nebst dem Winkel ADC, und der Seite AD. Weiter hat man aus dem Winkel an CD $= \eta$, ADC, und CDE, den Winkel ADE, nebst dem Flächenwinkel an DE, da dann aus AD, DE, und ADE sich der Inhalt des Dreyecks ADE ergiebt, nebst der Seite AE, und dem Winkel AED. Auf solche Art findet man für jedes folgende Dreyeck ausser der gegebenen Grundlinie, die anliegende Seite nebst dem eingeschlossenen Winkel, die zur Berechnung des Inhalts erforderlich sind. Die Summe aller Dreyecke nebst der Grundfläche giebt den Inhalt der ganzen Oberfläche der Pyramide.

586 §.

Eine Pyramide, die ein reguläres Polygon zur Grundfläche, und gleiche und ähnliche gleichschenklichte Dreyecke zu Seitenflächen hat, soll in der Folge der Kürze wegen eine **gleichseitige Pyramide** heissen. 219 F.

Wenn aus dem Mittelpunct G des um das reguläre Polygon ABCDEF beschriebenen Kreises eine grade Linie GA auf der Ebene des Polygons senkrecht gesetzt wird, und man zieht von A nach allen Winkelpuncten des Polygons die graden Linien AB, AC, AD u. s. f.: so werden dies die Seitenlinien einer gleichseitigen Pyramide, die A zur Spitze, und das Polygon zur Grundfläche hat.

Alle Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander, sind in einer solchen Pyramide gleich groß, auch sind die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche von gleicher Größe. Denn die Ecken an der Grundfläche werden insgesamt solche körperliche Dreyecke, worin die Seiten der einen den Seiten aller übrigen gleich, also auch die Winkel gleich groß sind (517 §).

Wenn die Pyramide ABCDEF gleichseitig ist: so geht eine lothrechte Linie AG von der Spitze A auf die Ebene der Grundfläche durch den Mittelpunct des um die Grundfläche zu beschreibenden Kreises. Denn wenn man BG, CG, DG zieht: so ist $BG = r(AB^2 - AG^2)$, $CG = r(AC^2 - AG^2)$. Weil nun $AB = AC = AD$: so ist $BG = CG = DG$. Also ist G der Mittelpunct des Kreises um BCDEF.

587 §.

Wenn man durch alle Seitenlinien *BC, CD* u. s. f. eines regulären Polygons *BCDEF* ebene Flächen legt, die gegen die Ebene des Polygons, unter gleichen spitzen Winkeln geneigt sind: so schliessen diese mit dem Polygon eine gleichseitige Pyramide ein, die das Polygon zur Grundfläche hat.

Beweis. In den dreyseitigen Ecken an B, C, u. s. f. ist $FBC = BCD$, und die Winkel an diesen Seitenflächen sind gleich; also sind auch die übrigen Seiten dieser Ecken gleich (513 §). Ueberdem sind die Ecken an B, C, D u. s. f. alle gleichschenklicht (515 §). Also machen die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit den Seitenlinien der Grundfläche an B, C, D, u. s. f. gleiche Winkel. Wenn nun BH

und

und CI ein paar zunächst nach einander folgende Durchschnittslinien sind; so werden sich diese nothwendig irgendwo in A schneiden. Denn man halbire die Flächenwinkel an BH, und CI mit ein Paar Ebenen, welche die Grundfläche in BK, CL schneiden: so halbiren diese Linien die Winkel der Grundfläche (511 §). Also müssen sie durch den Mittelpunct G des Kreises um die Grundfläche gehen. Demnach gehen auch beyde Ebenen durch G, und schneiden einander in der graden Linie AG. Ueberdem stehen die Ebenen HBG, ICG auf der Grundfläche senkrecht (511 §), und es wird vorausgesetzt, daß die Winkel an BC, CD u. s. f. spitze sind. Also sind auch die Winkel HBG, ICG spitze (528 §). Aber AG ist auf der Ebene der Grundfläche senkrecht, also müssen BH und CI mit AG zusammenstossen, und zwar in einem, und eben demselben Punct A, weil HBG = ICG wird (515 §). Es erhellet eben so, daß alle übrige Durchschnittslinien durch D, E, F u. s. f. durch A gehen müssen. Demnach wird ABCDEF eine gleichseitige Pyramide.

588 §.

Wenn alle Seitenlinien *AB*, *AC*, *AD* u. s. f. einer gleichseitigen, und gleichwinklichten körperlichen Ecke um *A* gleich groß sind; so liegen die Puncte *B*, *C*, *D*, *E*, u. s. f. in einer Ebene, und sind die Winkelpuncte eines regulären Polygons von eben so viel Seitenlinien, als die Ecke Seitenflächen hat. 219 F.

Beweis. Man ziehe BC, CD, DE, u. s. f. Auf der Ebene BCD sey AG senkrecht: so halbirt die Ebene ACG den Winkel BCD. Man ziehe BG, GC,

GD: so wird BG = GC = GD (78 §). Also ist GDC = GCB, die Winkel an GC und GD sind rechte, und ADG = ACG. Demnach machen ADG, ADC an AD, und ACG, ACB, an AC gleiche Flächenwinkel (498 §), und ADG halbirt den zur Ecke A gehörigen Winkel an AD. Also ist auch GDE = GDC (511 §). Man ziehe GE: so wird GE = GC = GD (54 §), also $AE^q = AD^q = AG^q + GD^q = AG^q + GE^q$, folglich ist AGE = R (112 §), und die Ebene BCD geht durch GE (306 §). Also erhellet, wie vorhin, daß AGE den Winkel an AE halbire, und hieraus ferner, daß GF = GE, und GF auf AG senkrecht sey, folglich auch F in der Ebene BCDE liege.

589 §.

Den Inhalt und die Oberfläche einer gleichseitigen Pyramide *ABCDEF* nebst der Länge ihrer gleichen Seitenlinien zu finden, wenn die Polygon-Seite $BC = a$, nebst dem Polygonwinkel $= \varphi$ der Grundfläche, und überdem der Winkel ψ gegeben ist, unter welchem die Seitenflächen die Grundfläche schneiden.

Aufl. Wenn AG auf der Grundfläche lothrecht, und überdem BG gezogen ist: so hat man $BG = \frac{a}{2\,cof\frac{1}{2}\varphi}$ (442 §), und die Höhe $AG = BG \cdot \text{tang}\,ABG$ (439 §). Da nun $\text{tang}\,ABG = \sin\frac{1}{2}\varphi \cdot \text{tg.}\,\psi$ (529 §): so wird $AG = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi \cdot \text{tg.}\,\psi$. Dies giebt die Seitenlinie $AB = \frac{1}{2}a\,\frac{\sqrt{(1+sin\frac{1}{2}\varphi^2\,tang\psi^2)}}{cof\frac{1}{2}\varphi}$ (283 §).

Wenn nun die Grundfläche *n* Seitenlinien hat:

so

so ist ihr Inhalt $= \frac{1}{4} naa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$ (462 §), und dies mit $\frac{1}{3}$AG $= \frac{1}{6} a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}.\psi$ multiplicirt, giebt der Pyramide Inhalt $= \frac{1}{24} na^3 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg} \psi$. Weil nun ABG schon gefunden ist: so hat man $\sin$ ABC $= \frac{\sin \text{ABG}}{\sin \psi}$ (523 §). Demnach wird des Dreyecks ABC Inhalt $= \frac{1}{2}$BC.AB $\sin$ ABC. Es ist aber

$$\operatorname{cosec} \text{ABG} = r\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2 tg\,\psi^2}\right) \text{(419 §)}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\sin \frac{1}{2}\varphi^2 tg\,\psi^2)}}{\sin \frac{1}{2}\varphi\, tg\,\psi}, \text{ und also } \sin \text{ABG} =$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\varphi\, tg\,\psi}{\sqrt{(1+\sin \frac{1}{2}\varphi^2 tg\,\psi^2)}} \text{ (420 §). Dies giebt}$$

$$\sin \text{ABC} = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi\, tg\,\psi}{\sqrt{(1+\sin \frac{1}{2}\varphi^2 tg\,\psi^2)}}, \text{ und des}$$

Dreyecks ABC Inhalt $= \frac{1}{4} aa \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi\, tg\,\psi}{\cos \frac{1}{2}\varphi} =$

$\frac{1}{4} aa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tang} \psi$, also die ganze Oberfläche der

Pyramide $= \frac{n}{4} aa \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg} \psi + \frac{n}{4} aa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi =$

$\frac{n}{4} aa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi (1 + \operatorname{tang} \psi)$.

Die Oberfläche einer gleichseitigen Pyramide, die Grundfläche ungerechnet, ist einem Dreyeck gleich, davon die Höhe so groß ist, als die Höhe jeder von den gleichen Seitenflächen der Pyramide, und die Grundlinie so groß, als der Umfang ihrer Grundfläche.

Die

Die Höhe dieses Dreyecks ist demnach kleiner, als jede von den gleichen Seitenlinien der Pyramide.

590 §.

Wenn man alle Flächenwinkel eines regulären Körpers mit ebenen Flächen halbirt: so wird der ganze Körper dadurch in so viel gleiche, und ähnliche gleichseitige Pyramiden getheilt, als der Körper Seitenflächen hat, wovon diese Seitenflächen die Grundflächen werden.

Die Spitzen aller dieser Pyramiden fallen in einen Punct innerhalb des Körpers zusammen, und dies ist der Mittelpunct, jede Seitenlinie dieser Pyramiden aber, der Halbmesser einer Kugel, in deren Oberfläche alle Spitzen von den Ecken des Körpers liegen.

Beweis. Weil alle Flächenwinkel des Körpers gleich groß, und kleiner, als 2 R sind: so legt man auf solche Art durch alle Seitenlinien der Polygone, welche die Seitenflächen des Körpers abgeben, ebene Flächen, die gegen diese Seitenflächen, auf der inwendigen Seite unter gleichen spitzen Winkeln geneigt sind. Also komt auf jeder Seitenfläche eine gleichseitige Pyramide zu stehen (587 §), und alle diese Pyramiden passen in einander (338 §) so wie alle ihre Seitenflächen gleich und ähnlich sind. Jede Seitenfläche einer solchen Pyramide ist zugleich eine Seitenfläche einer anliegenden Pyramide; also fallen alle Spitzen in einen Punct zusammen. Weil nun alle Seitenlinien, die sich von diesem Punct bis an die Ecken des Körpers erstrecken, gleich groß sind, so liegen die Spitzen dieser Ecken alle in einer Kugelfläche

che, welche die gemeinschaftliche Spitze der Pyramiden zum Mittelpunct, und einen den Seitenlinien gleichen Halbmesser hat.

Demnach ist jeder reguläre Körper einer Pyramide gleich, deren Grundfläche so groß, als die ganze Oberfläche des Körpers, und deren Höhe so groß ist, als die Entfernung der Seitenflächen des Körpers vom Mittelpunct der, um denselben zu beschreibenden Kugel.

591 §.

Es ist eine Seitenlinie des regulären *Tetraëdri* $= a$ gegeben; man soll die Größe der Flächenwinkel des Körpers, den Halbmesser r, oder Durchmesser d der um das *Tetraëdrum* zu beschreibenden Kugel, und den körperlichen Inhalt desselben finden. 220 F.

Aufl. Weil alle Winkel der Seitenflächen $= 60°$ sind: so ist der Cosinus eines jeden Flächenwinkels

$$= \frac{\cos 60° - \cos 60° \cos 60°}{\sin 60° \sin 60°} \text{ (546 §)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$= \frac{1}{3}$. Also ist der Logarithme der Tafeln dieses Cosinus $= 10 - l3 = 9{,}5228787$, und der Winkel selbst $= 70° 31' 44''$. Nun gehört das Tetraëdrum ABCD in die Klasse der gleichseitigen Pyramiden, also kan man den Inhalt so finden. Man setze im 589 § $\Phi = 60°$, $\psi = 70° 31' 44''$: so wird die Höhe AG des Tetraëdri $= \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Phi . \operatorname{tang} \psi = \frac{1}{2} a . \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$r8 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$, und der Inhalt $= \frac{1}{24} n a^3 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Phi^2$

$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{8} . a^3 . \frac{1}{3} . r8 = \frac{1}{3\sqrt{8}} a^3 = \frac{1}{2 . 3 . \sqrt{2}} a^3$.

Um

Um den Durchmesser der zugehörigen Kugel zu finden, sey das Tetraëdrum wie im 590 § in vier Pyramiden getheilt. Die gemeinschaftliche Spitze dieser Pyramiden sey K, so ist K der Mittelpunct der um das Tetraëdrum beschriebenen Kugel, und KB ein Halbmesser. Es wird aber jeder Flächenwinkel an der Grundfläche $\psi = 35° 15' 52''$, und $\cos\psi = r\frac{(1+\frac{1}{3})}{2} = r\frac{2}{3}$, $\sin\psi = r\frac{1-\frac{1}{3}}{2} = r\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tang\psi = r\frac{1}{2}$. Ueberdem $\varphi = 60°$, $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{2}\varphi = r\frac{3}{4}$, $\tang\frac{1}{2}\varphi \frac{1}{\sqrt{3}}$. Also $r(1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \tg\psi^2) = r(1+\frac{1}{8}) = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Wenn also r der Halbmesser, und d der Durchmesser der zugehörigen Kugel ist: so hat man $r = KB = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{(1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \tang\psi^2)}}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$

$(589\,\S) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$.

Demnach ist $2r = d = ar\frac{3}{2}$, und es verhält sich das Quadrat der Seitenlinie des Tetraëdri zum Quadrat des Durchmessers der zugehörigen Kugel, wie 2 : 3. Der Inhalt fände sich nun $= 4 \cdot \frac{1}{24}na^2 \tang\frac{1}{2}\varphi^2 \tg\psi = \frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2.3\sqrt{2}}a^3$, wie vorhin.

Der Abstand der Seitenflächen des Tetraëdri vom Mittelpunct der zugehörigen Kugel KG ist $= \frac{1}{2}a \tg\frac{1}{2}\varphi \tg\psi$

$\text{tg}\,\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} a$
$= \frac{1}{3} r$. Und wenn ϱ der Halbmesser des um die Seitenfläche des Tetraëdri zu beschreibenden Kreises ist: so hat man $\varrho = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} a = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} d$; also $2\varrho = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{9}} d$.

Wenn also der Durchmesser d, oder Halbmesser r einer Kugel gegeben ist: so kan man auf folgende Art in der Kugel ein reguläres Tetraëdron verzeichnen. In der Entfernung $= \frac{1}{3} r$ vom Mittelpunct schneide man die Kugel mit einer Ebene. Diese giebt einen Kreis der Kugel, dessen Halbmesser $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} d$, worin sich ein gleichseitiges Dreyeck verzeichnen läst, dessen Seite $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d$, und derjenige Pol dieses Kreises, welcher mit dem Mittelpunct der Kugel auf einer Seite liegt, ist die Spitze der vierten Ecke des Tetraëdri, wovon das Dreyeck die drey übrigen giebt.

592 §.

Aus der gegebenen Seite a des *Octaëdri* die Größe seiner Flächenwinkel, den Halbmesser r, oder Durchmesser d, der um dasselbe zu beschreibenden Kugel, und den körperlichen Inhalt desselben zu finden.

Aufl. Die Ecke um A sey eine Ecke des Octaëdri. Man nehme $AB = AC = AD = AE = a$; so wird BCDE ein Quadrat (585 §), also $EBC = 90°$. Weil 221 F.

nun

nun ABC = ABE = 60°: so wird des Winkels an AB Cosinus = $\frac{\cos 90° - (\cos 60°)^2}{(\sin 60°)^2} = -\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}$. Also ist dieser Winkel = 109° 28′ 16″. Es sey dieser Winkel = α, und $\psi = \frac{1}{2}\alpha$: so hat man $\sin\psi = r\frac{1+\frac{1}{3}}{2} = r^{\frac{2}{3}}$, $\cos\psi = r\frac{1-\frac{1}{3}}{2} = r^{\frac{1}{3}}$ und $\tang\psi = r\sqrt{2}$.

Man setze 60° = φ, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{2}\varphi = r^{\frac{3}{4}}$, $\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ferner $r(1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2) = r^{\frac{3}{2}}$. Es sey das Octaëdrum wie im 590 § in acht Pyramiden getheilt: so ist die Höhe dieser Pyramiden = $\frac{1}{2}a \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot a = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot a$. Der Inhalt des Octaëdri = $8\frac{1}{2}\frac{1}{4}na^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$, und $r = \frac{1}{2}a$.

$$\frac{r(1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

oder $d = ar\sqrt{2}$. Es wird also $\varrho = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}d$ und $2\varrho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}d$.

In der Pyramide ABCDE ist des Winkels an BC Cosinus = $\frac{\cos 60° - \cos 60°\cos 90°}{\sin 60°\sin 90°} =$

$$\frac{\cos 60°}{\sin 60°} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Wenn

Wenn also eine neue Pyramide FBCDE, die der vorigen ABCDE gleich und ähnlich ist, an der Grundfläche BCDE so gesetzt wird, daß die Spitzen A und F auf verschiedenen Seiten der Grundfläche liegen: so wird der, aus beyden zusammengesetzte Körper, ein reguläres Octaëdrum.

Eine senkrechte Linie AG von A auf die Ebene BCDE geht durch den Mittelpunct des um BCDE beschriebenen Kreises (586 §), und geht verlängert zugleich durch F. Also sind A und F die Pole des Kreises um BCDE auf der Oberfläche der zugehörigen Kugel, und AF ist ihr Durchmesser. Weil nun AG=FG, so ist G ihr Mittelpunct, und der Kreis um BCDE ein gröster Kreis. Hieraus ergiebt sich folgende Art, in der Kugel ein reguläres Octaëdrum zu beschreiben. Man verzeichne in einem gröſten Kreise der Kugel ein Quadrat: so sind die Winkelpuncte dieses Quadrats, nebst den beyden Polen dieses gröſten Kreises, die Spitzen der Ecken des Octaëdri.

593 §.

Wenn die Seite des *Icosaëdri* gegeben ist, die Größe der Flächenwinkel, den Halbmesser, oder Durchmesser, der um dasselbe zu beschreibenden Kugel, und den körperlichen Inhalt desselben zu finden.

Aufl. Es sey A eine Ecke des Icosaëdri, und AB=AC=AD=AE=AF; so ist BCDEF ein reguläres Fünfeck (588 §). Also FBC=108°=90°+18°, und $\cos FBC = -\sin 18° = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ (444 §). Dies giebt des Winkels an AB Cosinus 222 F.

$$= \frac{\cos FBC - \cos ABC \cos ABF}{\sin ABC \sin ABF} = \frac{\cos FBC - (\cos 60°)^2}{(\sin 60°)^2}$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{4} : \frac{3}{4} =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$ Also giebt die Rechnung:

$l\,5 = 0,6989700$

$l \sin tot + l\,5 = 10,3494850$

$l\,3 = 0,4771213$

$9,8723637$

und der gesuchte Winkel ist $= 138° 11' 23''$. Ist nun dieser Winkel an $AB = \alpha$, so hat man $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, und $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$.

Es sey $\psi = \frac{1}{2}\alpha$: so wird $\cos \psi = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$,

$\sin \psi = r\,\frac{3+\sqrt{5}}{6}$, und $\tang \psi = r\,\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

Es bleibt überdem $\sin \frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{1}{2}\Phi = r\,\frac{3}{4}$, $\tang \frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; also wird

$$\sin \tfrac{1}{2}\Phi^2 \tang \psi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})},$$

$$r(1 + \sin \tfrac{1}{2}\Phi^2 \operatorname{tg} \psi^2) = \frac{\sqrt{(15-3\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}} =$$

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}, \quad \frac{\sqrt{(1+\sin \frac{1}{2}\Phi^2 \operatorname{tg} \psi^2)}}{\cos \frac{1}{2}\Phi} =$$

$$\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}},$$

und

und $r=a\cdot\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$, oder $d=a\cdot\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$.
Demnach ist $d:a=r(5-r5):r(3-r5)=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, und der Kugel Durchmesser verhält sich zur Seite des Icosaëdri, wie die Seite des regulären Fünfecks zur Seite des in eben dem Kreise beschriebenen Zehnecks (447. 444 §).
Es ist also auch $d=\frac{\sqrt{(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}})}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}}a$.

Der Abstand der Seitenflächen vom Mittelpunct ist $=\frac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\Phi\,\mathrm{tg}\psi=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{r(3-r5)}a$; und weil $a=\frac{r(3-r5)}{r(5-r5)}d$; so ist dieser Abstand $=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r3}\cdot\frac{r(3+r5)}{r(5-r5)}d=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r3}\cdot\frac{3+r5}{r(5-r5)r(3+r5)}d=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r3}\cdot\frac{3+r5}{r(10+2r5)}d=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r2}\cdot\frac{1}{r3}\cdot\frac{r(5+r5)}{3+r5}d$. Der Inhalt des Icosaëdri ist $=$

$20\cdot\frac{1}{24}na^3\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\Phi^2\,\mathrm{tg}\psi=\frac{5}{6}\cdot\frac{r(3+r5)}{r(3-r5)}\cdot a^3=\frac{5}{6}\cdot\frac{r(3+r5)}{r(3-r5)}\cdot\frac{(3-r5)r(3-r5)}{(5-r5)r(5-r5)}d^3=\frac{5}{6}\cdot\frac{(3-r5)r(3+r5)}{(5-r5)r(5-r5)}d^3$.

Wenn durch die Seitenlinien BC, CD, DE, EF, FB des Fünfecks BCDEF die Seitenflächen BCG, CDH, DEI, FEK, BFL des Icosaëdri gelegt sind: so erhellet, daß die Puncte G, H, I, K, L, insgesamt von A gleich weit entfernet sind. Zieht man demnach GH, HI, IK, KL, GL: so ergeben sich 15 Seitenflächen des Icosaëdri und GHIKL ist wieder ein reguläres Fünfeck, das dem Fünfeck BCDEF gleich und ähnlich ist, und dessen Ebene mit BCDEF parallel liegt. Man setze demnach unterwärts an dem Fünfeck GHIKL eine Pyramide MGHIKL, die der Pyramide ABCDEF gleich und ähnlich ist: so hat man das ganze Icosaëdrum, und die grade Linie AM ist ein Durchmesser der Kugel, der auf beyden Ebenen BCDEF, und GHIKL senkrecht steht.

Der Halbmesser $RB = \varrho$ des Kreises um BCDEF ist $= \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}FBC}$, und $\cos\frac{1}{2}FBC = \frac{r(5-r5)}{2r2}$.

Also $\varrho = \frac{r2}{r(5-r5)}\,a = \frac{r2}{r(5-r5)}\cdot\frac{r(3-r5)}{r(5-r5)}\,d = \frac{r2\,r(3-r5)}{5-r5}\,d.$

Durch die Axe AM, und alle übrige 10 Winkelpuncte des Icosaëdri kan man ebene Flächen legen; diese werden so viele gröste Kreise geben, die sich unter Winkeln von 36° schneiden. Ihre Durchschnittspuncte mit den Parallelkreisen durch BCDEF und GHIKL bestimmen die Winkelpuncte des Icosaëdri auf der Oberfläche der Kugel.

594 §.

Die Seite des regulären *Hexaëdri* ist gegeben: man soll die Größe der Flächenwinkel

den

den Durchmesser, oder Halbmesser, der um dasselbe zu beschreibenden Kugel, nebst dem Verhältniß des körperlichen Inhalts gegen den Würfel des Durchmessers der Kugel finden.

Aufl. Wenn A eine Ecke des Hexaëdri ist, und AB, AC, AD die drey Seitenlinien an dieser Ecke; so sind die Flächenwinkel an AB, AC, AD u. s. f. rechte Winkel. Denn es wird eines jeden dieser 223 F.

$$\text{Winkel Cosinus} = \frac{cos\,90° - (cos\,90°)^2}{(sin\,90°)^2} = \frac{0}{1} = 0,$$

also jeder Winkel $= 90°$. Demnach wird $\psi = 45°$, $\sin\psi = \cos\psi = r\frac{1}{2} = \frac{r2}{2}$, und $\tang\psi = 1$; überdem ist $\varphi = 90°$, also auch $\sin\frac{1}{2}\varphi = r\frac{1}{2} = \cos\frac{1}{2}\varphi$, und $\tang\frac{1}{2}\varphi = 1$. Dies giebt $\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2 = \frac{1}{2}$,

$$r(1 + \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2) = r(1+\tfrac{1}{2}) = r\tfrac{3}{2},$$

$$\frac{r(1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = r\tfrac{3}{2} : r\tfrac{1}{2} = r3,$$

und $r = \frac{1}{2}ar3$, oder $d = ar3$.

Das Hexaëdrum ist mit dem Würfel (334 §) einerley, also weiß man den Inhalt ohnehin zu berechnen. Es wird aber auch hier dieser Inhalt $= 6 \times \frac{1}{2\,4} na^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi = a^3$, wie dem 350 § gemäß ist, oder auch $= \frac{1}{3r3} d^3$, weil $a = \frac{1}{r3} d$.

Die Ebenen ADEH und BCFG schneiden einander in LM, so, daß LM auf den beyden Seitenflächen DFEG, ACHB senkrecht steht, und wenn KM = KL

= KL ist: so ist K von allen Winkelpuncten des Körpers gleich weit entfernt. Folglich ist K der Mittelpunct der um den Würfel zu beschreibenden Kugel. Die Ebenen ADEH und BCFG geben ein paar grösste Kreise, die sich senkrecht schneiden, und ihre Durchschnittspuncte mit den Parallelkreisen durch DFEG und ACHB bestimmen die Winkelpuncte des Würfels auf der Oberfläche der Kugel. Es ist

aber $KL = \frac{1}{2}LM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2r_3}d$, und

$$DL = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{r_2}{2}.a = \frac{r_2}{2}.\frac{1}{r_3}d,$$

also $DE = \frac{r_2}{r_3}d$, oder $d = \frac{r_3}{r_2}DE$.

595. §.

Die Seite des *Dodecaëdri* ist gegeben, man soll die Grösse der Flächen-Winkel, den Durchmesser der Kugel, die sich um das *Dodecaëdrum* beschreiben läst, und den körperlichen Inhalt desselben finden.

224 F. Aufl. Ist A eine Ecke des Dodecaëdri: so ist jede Seitenfläche dieser Ecke = 108°. Da nun $\cos 108° = \frac{1-r5}{4}$ (444 §) und $\sin 108° = r\frac{5+r5}{8} = \frac{r(10+2r5)}{4}$: so wird des gesuchten Flächenwinkels an AB Cosinus $= \left(\frac{1-r5}{4} - \frac{(1-r5)^2}{4^2}\right) : \frac{10+2r5}{16} = \frac{4-4r5-1+2r5-5}{16} : \frac{10+2r5}{16} =$

$= -\frac{2+2r5}{10+2r5} = -\frac{1+r5}{5+r5}$. Man setze dies

sen Winkel $= \alpha$: so ist $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(\sin 54°)^2}{(\sin 108°)^2}$,

und man findet:

$l\sin 54° = 9{,}9079576$
$l(\sin 54°)^2 + lr^2 = 39{,}8159152$
$l\sin 108° = 9{,}9782063$
$l(\sin 108°)^2 = 19{,}9564126$
$l\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 19{,}8595026$
$l\sin\frac{1}{2}\alpha = 9{,}9297513$
Also $\frac{1}{2}\alpha = 58°\ 16'\ 57''$
und $\alpha = 116°\ 33'\ 54''$.

Man setze nun $\frac{1}{2}\alpha = \psi$: so wird $\sin\psi =$

$r\left(1+\frac{1+r5}{5+r5}\right):2 = r\frac{5+r5+1+r5}{2(5+r5)}$

$= r\frac{3+r5}{5+r5}$, und $\cos\psi = r\left(1-\frac{1+r5}{5+r5}\right):2$

$= r\frac{5+r5-1-r5}{2(5+r5)} = r\frac{4}{2(5+\sqrt{5})} =$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(5+\sqrt{5}}}$, also $\operatorname{tg}\psi = \frac{r(3+r5)}{\sqrt{2}}$. Ferner

wird $\varphi = 108°$, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = r\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right):2$

$= r\frac{4-1+\sqrt{5}}{8} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$, $\cos\frac{1}{2}\varphi =$

$r\left(1+\frac{1-r5}{4}\right):2 = r\frac{(5-\sqrt{5})}{8}$, also

$\tan g \frac{1}{2}\varphi = \frac{r(3+r5)}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$.

Man erhält demnach

$\sin \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{8}$,

$\sqrt{(1+\sin \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)} = r\frac{15+3\sqrt{5}}{8}$, und

$\frac{r(1+\sin \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{\sqrt{(15+3\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$, also

$r = \frac{1}{2}a\frac{r15+3r5}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$, oder

$d = a\frac{\sqrt{15+3r5}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$, und $a = \frac{\sqrt{(5-r5)}}{\sqrt{(15+3\sqrt{5})}}d$.

Der Abstand der Seitenflächen vom Mittelpunct ist $\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} \cdot \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{r2}$

$= \frac{1}{2}a\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$

$\frac{3+r5}{r(15+3r5)}d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r2} \cdot \frac{1}{r3} \cdot$

$\frac{3+r5}{r(5+r5)}d$, wie beym Icosaëdro.

Der körperliche Inhalt wird $= \frac{60}{24}a^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi$

$= \frac{5}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{5-r5} \cdot \frac{r(3+r5)}{r2}a^3$, und weil $a =$

$\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{r3r(5+r5)}d$, also $a^3 = \frac{(5-\sqrt{5})r(5-\sqrt{5})}{3(5+r5)r3r(5+r5)}d^3$:

so wird dieser Inhalt $= \frac{5}{6} \cdot \frac{(3+r5)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{(5+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}r6}$.

Es sey ABCDE eine Seitenfläche des Dodecaëdri, und ABGMF, BGNHC ein paar an der vorigen anliegende: so erhellet, daß die graden Linien AF, BG, CH, u. s. f. auch die hinterwärts durch D und E gehenden Seitenlinien DI, EK, gegen die Ebene ABCDE unter gleichen Winkeln geneigt sind (511 §). Weil nun AF = BG = CH u. s. f.: so sind die senkrechten Linien von F, G, H, u. s. f. auf die Ebene ABCDE gleich groß. Folglich die Puncte FGHIK in einer mit ABCDE parallelen Ebene. Eine senkrechte Linie MZ von M auf AB halbirt AB, und wenn X des Kreises um ABCDE Mittelpunct ist: so geht eine Linie XZ von X auf AB senkrecht gezogen ebenfalls durch Z, so daß MZX der Flächenwinkel des Dodecaëdri ist, und zugleich der Neigungswinkel der Linie MZ gegen ABCDE. Die senkrechten Linien von N auf BC, von O auf CD, von P auf DE, von L auf AE sind gleich groß, und ihr Neigungswinkel gegen ABCDE ist = MZX. Also sind auch L, M, N, O, P von der Ebene ABCDE gleich weit entfernet, und liegen in einer, mit ABCDE parallelen Ebene. Mit diesen Ebenen ist auch QRSTV parallel.

Eine Ebene durch AF auf ABCDE senkrecht gesetzt halbirt den Winkel BAE (511 §), und die Durchschnittslinie geht durch X (139 §). Man hat aber in dem rechtwinklichten soliden Dreyeck bey A, dessen Seitenlinien AB, AF, AX sind, $\cos FAX = \frac{\cos FAB}{\cos BAX} = \frac{\cos 108^\circ}{\cos \frac{1}{2} 108^\circ} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} : \frac{r(5-r5)}{2\sqrt{2}} = \frac{1-r5}{4} : \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})\sqrt{2}}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})\sqrt{2}}}$.

Weil

Weil nun FAX stumpf ist: so ist sein Nebenwinkel FAW spitz, und $\cos FAW = \frac{r5-1}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}\sqrt{2}}$.

Also wird $\sin FAW = r\left(1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(5-\sqrt{5})^2}\right)$

$= r\frac{10-2\sqrt{5}-5+2\sqrt{5}-1}{2(5-\sqrt{5})} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$,

und FW, des Puncts F oder der Ebene FGHIK Abstand von der Ebene ABCDE, wird $=$ AF.

$\sin FAW = \frac{2a}{\sqrt{2}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$ oder, weil $a = \frac{r(5-\sqrt{5})}{\sqrt{3}\sqrt{(5+\sqrt{5})}}d$: so wird $WF = \frac{2d}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{(5+\sqrt{5})}}$. Nun war die Ebene ABCDE vom Mittelpunct der Kugel um die Distanz $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{r3}\cdot\frac{3+r5}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}d$ entfernt.

Diese sey $= D$: so ist die Ebene FGHIK vom Mittelpunct um die Distanz $D - WF$ entfernt. Diese wird also $= \frac{1}{r2}\cdot\frac{1}{r3}\cdot\frac{1}{r(5+\sqrt{5})}$

$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2\right)d = \frac{\sqrt{5}-1}{2r2\sqrt{3}\sqrt{(5+\sqrt{5})}}d.$

Eben so weit ist die Ebene LMNOP auf der andern Seite vom Mittelpunct der Kugel entfernt.

Man kan also in einer gegebenen Kugel auf folgende Art das Dodecaëdrum verzeichnen. Durch eine willkührliche Axe der Kugel lege man auf beyden Seiten vom Mittelpunct zwo senkrechte Ebenen

in

in den Entfernungen D und D—WF vom Mittelpunct. Durch die Axe lege man fünf ebene Flächen unter gleichen Winkeln von 36°. Diese werden so viele gröste Kreise geben, welche jeden der vier Parallelkreise in zehn Puncten schneiden. Wenn man nun in jedem dieser Parallelkreise 5 Puncte nimt, die um 72° von einander abstehen, so daß wechselsweise je zweene und zweene in einerley gröstem Kreise liegen: so hat man die 20 Winkelpuncte des Dodecaëdri.

Der XXVII. Abschnitt.

Von der Cylinder- und Kegel-Fläche.

596 §.

Wenn AC ein grader Cylinder ist, in dessen Grundfläche AB man ein reguläres Polygon beschrieben hat; und man ziehet durch alle Winkelpuncte A, E, B, u. s. f. des Polygons mit der Axe des Cylinders die Parallelen AD, EF, u. s. f., welche den Umfang der entgegengesetzten Grundfläche, in D, F, C u. s. f. treffen: so schliessen die Ebenen dieser Parallelen nach der Ordnung genommen AF, EC u. s. f. ein senkrechtes im Cylinder beschriebenes Prisma ein, wie im 368 §. 225 F.

Durch die Cylinder-Fläche soll in der Folge der Kürze wegen allemahl die krumme Oberfläche des graden Cylinders, ohne den Grundflächen: durch die prismatische Fläche im Cylinder aber, die Oberfläche des im Cylinder beschriebenen Prisma, ohne dessen Grundflächen verstanden werden.

Wäre

Wäre um die Grundfläche des graden Cylinders ein reguläres Polygon durch die Berührungspuncte A, E, B, u. s. f. beschrieben, und man legte durch alle Seitenlinien desselben ebene, auf der Grundfläche senkrechte Flächen; so würden diese mit der erweiterten Ebene der entgegengesetzten Grundfläche ein senkrechtes um den Cylinder beschriebenes Prisma einschliessen, wie im 368 §.

Die Oberfläche dieses Prisma, seine Grundflächen ungerechnet, soll hinführo die prismatische Fläche um den Cylinder heissen.

597 §.

Die prismatische Fläche im Cylinder ist allemahl kleiner, aber die prismatische Fläche um den Cylinder allemahl größer, als die Cylinderfläche.

598 §.

Die Oberfläche eines graden Cylinders ist so groß, als ein Rechteck, dessen eine Seite dem Umfang der Grundfläche, die andre aber der Höhe des Cylinders gleich ist.

225 F. Beweis. Es sey des Rechtecks GI Grundlinie GH dem Umfang der Grundfläche AB, die Höhe GK der Höhe AD des Cylinders gleich, und die Cylinderfläche sey $=$ C. Dafern nun C $\prec$ GI ist: so nehme man GI:C $=$ GH:GL, und es wird GL $\prec$ GH seyn. Man ziehe LM $\#$ HI: so ist GH:GL $=$ GI:GM, also wird GI:C $=$ GI:GM, und C $=$ GM. Da nun GH $=$ dem Umfang der Grundfläche AB: so ist GL kleiner, als dieser Umfang. Man beschreibe demnach im Kreise AB ein reguläres Polygon

lygon AEBZ, dessen Umfang größer, als GL ist (221 §), und dieser Umfang sey = GN: so muß GN < GH seyn (138 §). Auf diesem Polygon, als der Grundfläche beschreibe man ein Prisma im Cylinder, und dessen Fläche ohne den Grundflächen sey = P. Wenn nun NO mit HI parallel ist: so wird GO = P (584 §), also P > GM, oder P > C, welches dem 597 § entgegen ist.

Wäre C > GI, so nehme man GI : C = GH : GQ, und es wird GQ > GH seyn. Man ziehe QR # HI: so ist GH : GQ = GI : GR, und C = GR. Weil GQ größer, als des Kreises GH Umfang ist: so beschreibe man um den Kreis AB ein reguläres Polygon, dessen Umfang kleiner, als GQ ist (222 §). Dieser Umfang sey = GS, und ST # HI: so ist GS < GQ (144 §), und GT < GR. Auf dem Polygon um den Kreis AB als der Grundfläche beschreibe man ein Prisma um den Cylinder (596 §) und dessen Fläche ohne den Grundflächen, sey = Π: so wird GT = Π seyn (584 §). Also ist Π < GR, folglich auch Π < C, welches mit dem 597 § streitet.

Kan aber die Cylinderfläche weder größer, noch kleiner, als GI seyn: so ist sie diesem Rechteck gleich.

Wenn also der Grundfläche Durchmesser = d, des Cylinders Höhe = a ist: so wird die Cylinderfläche = Πad (466. 276 §).

Es ergeben sich hieraus leicht folgende zweene Sätze:

Ungleich hoher Cylinder Flächen verhalten sich wie der Cylinder Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind (245 §).

Gleich

Gleich hoher Cylinder Flächen verhalten sich wie die Peripherien oder Halbmesser der Grundflächen (244. 223 §).

599 §.

225 F. Die Cylinder-Fläche ist einem Kreise *K* gleich, dessen Halbmesser *R* die mittlere Proportionallinie zwischen des Cylinders Höhe *A*, und der Grundfläche Durchmesser *D* ist.

Beweis. Es sey GV = 2GK: so ist das Dreyeck GHV = GI = C. Wenn nun GW = dem Halbmesser ϱ der Grundfläche AB ist: so wird das Dreyeck GHW = AB (150 §). Demnach ist C: AB = GHV: GHW (158 §) = GV: GW (245 §). Da nun GV: GK = D: ϱ, oder D × GK = D × A = ϱ. GV, ferner A: R = R: D, oder A. D = R^2 ist, vermöge der Voraussetzung; so wird ϱ. GV = R^2, oder GV: R = R: ϱ. Demnach ist GV: ϱ = R^2: $ϱ^2$ (235. 236 §) = GV: GW, und C: AB = R^2: $ϱ^2$. Aber auch K: AB = R^2: $ρ^2$ (255 §), also C: AB = K: AB und C = K.

690 §.

225 F. Wenn eine Ebene den graden Cylinder durch die Axe schneidet: so ist die Durchschnitts-figur ein Rechteck ABCD, dessen eine Seite AB dem Durchmesser der Grundfläche, die andre Seite AD des Cylinders Höhe gleich ist (364 §). Dies soll der Kürze wegen das Rechteck durch die Axe heissen.

Die Oberflächen ungleicher Cylinder verhalten sich, wie die Rechtecke durch ihre Axe. Denn sie verhalten sich wie die ihnen gleichen Kreise, und diese, wie die Quadrate ihrer Halbmesser, und

diese

diese Quadrate sind den Rechtecken durch die Axe gleich (248 §).

601 §.

Wenn in des senkrechten Kegels ABD Grundfläche ein reguläres Polygon BCDE beschrieben ist, und man ziehet die Seiten des Kegels AB, AC, AD, u. s. f.: so erhält man eine gleichseitige im Kegel beschriebene Pyramide ABCDE. Wenn aber um die Grundfläche BD eines graden Kegels ein reguläres Polygon FGHI beschrieben ist, dessen Seitenlinien des Kegels Grundfläche in B, C, D, u. s. f. berühren, und man ziehet die Seiten des Kegels AB, AC, AD u. s. f.: so schliessen die Ebenen durch jede Polygonseite der Grundfläche, und die zugehörige Seite des Kegels, eine gleichseitige, um den Kegel beschriebene Pyramide ein. 226 F.

Durch die Kegel-Fläche wird in der Folge die krumme Oberfläche des graden Kegels ohne die Grundfläche, und durch die Pyramiden-Fläche in und um den Kegel ebenfalls die Oberfläche, der in, oder um den Kegel beschriebenen Pyramide, die Grundfläche ungerechnet, verstanden werden.

602 §.

Die Pyramidenfläche im Kegel ist allemahl kleiner; die Pyramiden-Fläche um den Kegel aber grösser, als die Kegelfläche.

603 §.

Die Kegelfläche *ABD* ist einem Dreyeck *FGH* gleich, dessen Grundlinie *FG* so groß, als der Umfang der Grundfläche *BD* des Kegels; die Höhe *FH* aber so groß, als die Seite *AB* des Kegels ist. 226 227 F.

Beweis.

226 F. **Beweis.** Die Kegelfläche kan weder größer, noch kleiner, als das Dreyeck FGH seyn. Es sey nemlich die Kegelfläche = C, und man setze zuerst, daß C > FGH sey. Man nehme FGH : C = FG : FI: so ist FI > FG. Ziehet man nun HI: so ist FGH : FIH = FG : FI, also FGH : C = FGH : FIH, und C = FIH. Da nun FI größer ist, als FG, d. i. größer, als der Umfang der Grundfläche BD: so beschreibe man um dieselbe ein reguläres Polygon, dessen Umfang < FI ist, und setze auf demselben als der Grundfläche eine um den Kegel ABD beschriebene Pyramide. Wenn nun FK diesem Umfang gleich ist: so muß FK > FG seyn (144 §). Man ziehe HK, so ist das Dreyeck FHK = der Pyramidenfläche um den Kegel (589 §). Aber es ist FHK < FHI (244 §). Also die Pyramidenfläche um den Kegel kleiner, als die Kegelfläche, welches dem 602 § zuwieder ist.

227 F. Man nehme nun fürs zweyte an, daß C < FGH sey und FGH : C = FG : FP: so wird FP < FG. Es sey ferner FI zwischen FG und FP eine mittlere Proportionallinie, so, daß FG : FI = FI : FP ist, und man ziehe IK mit GH parallel; so wird das Dreyeck FKI ∽ FGH, und FGH : FKI = $FG^2 : FI^2$ (250 §). Aber $FG^2 : FI^2$ = FG : FP (235. 236 §), also FGH : FKI = FGH : C, und FKI = C. Wenn nun C der Mittelpunct von der Grundfläche des Kegels und CB ihr Halbmesser ist; so nehme man ferner FG : FI = CB : CE, und beschreibe mit dem Halbmesser CE, der kleiner, als CB seyn wird, einen Kreis ES, aus dem Mittelpunct C. Im Kreise BD aber beschreibe man ein reguläres Polygon, dessen Seiten vom Mittelpunct C weiter, als um die Di-

stanz CE entfernet sind (138 §). Eine Seite dieses Polygons sey MN, und MN sey bey O in zweene gleiche Theile getheilt. Durch den Punct O, und des Kegels Axe lege man eine Ebene ACO: so steht ihr Durchschnitt CO mit der Grundfläche auf MN senkrecht. Nun treffe CO verlängert den Umfang der Grundfläche in B, so ist AB eine Seite des Kegels. Durch E sey EL mit AB parallel, und überdem AO und OL gezogen. Weil nun, vermöge der Voraussetzung FG:FI = CB:CE, und CB:CE = Umfang BD:Umfang ES: so ist FG:FI = Umf. BD: Umf. ES; und FI = Umf. ES. Weil ferner CB:CE = AB:EL, und FG:FI = FH:FK, so ist auch AB: EL = FH:FK, und EL = FK. Es erhellet aber, daß AB > AO, AO > OL, OL > LE sey (76 §). Nimt man also FQ = AO: so fällt Q zwischen K und H. Ueberdem ist der Umfang des in dem Kreise BD beschriebenen Polygons, wovon MN eine Seite war, größer als der Umf. ES und kleiner, als der Umf. BD. Nimt man also FR = dem Umfang dieses Polygons: so fällt R zwischen I und G.

Man ziehe QR: so ist das Dreyeck FQR > FKI. Es sey auf dem Polygon, als der Grundfläche eine Pyramide im Kegel ABD beschrieben (601 §), und ihre Fläche ohne die Grundfläche = P: so ist P = FQR (589 §), also P > FKI, oder P > C, welches wiederum mit dem 602 § streitet.

Kan aber die Kegel-Fläche weder größer, noch kleiner, als FGH seyn: so ist sie diesem Dreyeck gleich.

604 §.

Man nehme nun FT = CB dem Halbmesser der Grundfläche des Kegels: so ist das Dreyeck FGT 227 F.

der Grundfläche gleich (150 §). Also verhält sich die Kegelfläche zur Grundfläche des Kegels = Dr. FGH : Dr. $FGT = FH : FT$, d. i. wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche.

605 §.

Die Kegelfläche C ist einem Kreise K gleich, dessen Halbmesser R die mittlere Proportio-
226 F. nallinie zwischen der Seite des Kegels, und dem Halbmesser ϱ der Grundfläche BD ist.

Beweis. Es ist $C : BD = AB : \varrho$ (604 §). Weil nun $AB : R = R : \varrho$, wie vorausgesetzt wird: so ist $AB : \varrho = R^2 : \varrho^2$ (235. 236 §), und $C : BD = R^2 : \varrho^2$. Da aber überdem $R^2 : \varrho^2 = K : BD$ (255 §): so wird $C : BD = K : BD$, und $C = K$.

606 §.

Ein Rechteck, dessen eine Seite dem Halbmesser der Grundfläche, die andre aber der Seite des Kegels gleich ist, soll der Kürze wegen das Rechteck der Kegelfläche heissen.

Die Flächen ungleicher Kegel verhalten sich, wie die Rechtecke dieser Flächen. Denn sie verhalten sich, wie die ihnen gleiche Kreise, und diese wie die Quadrate ihrer Halbmesser, aber diese Quadrate sind so groß, als die Rechtecke der den Kreisen gleichen Kegelflächen (248 §).

Die Fläche eines Cylinders verhält sich zur Fläche eines Kegels, wie das Rechteck durch des Cylinders Axe zum Rechteck der Kegelfläche. Denn auch diese Flächen verhalten sich, wie die ihnen gleichen Kreise, also wie die Quadrate der Halbmesser dieser Kreise, oder die denselben gleichen Rechtecke (248 §).

227 F.

607 §.

607 §.

Wenn eine Ebene DE den graden Kegel mit der Grundfläche BC parallel schneidet: so heist das Stück BDEC dieses Kegels, was zwischen den parallelen Ebenen DE, BC liegt, ein abgekürzter Kegel. Die Durchschnittsfigur DE ist ein Kreis, und die beyden parallelen Kreise BC, DE heissen die Grundflächen des abgekürzten Kegels. Das Stück BD der Seite AB des ganzen Kegels zwischen den beyden Grundflächen, wird die Seite des abgekürzten Kegels, und FG das Stück der Axe AF des ganzen Kegels zwischen diesen Grundflächen die Axe des abgekürzten Kegels genant. Letztere ist mit der Höhe desselben einerley. 228 F.

Der Schnitt durch die Axe des abgekürzten Kegels ist ein Trapezium, und jede von den beyden parallelen Seiten BD, CE macht mit den übrigen beyden inwärts der Figur gleich grosse Winkel. Dies Trapezium wird von der Axe GF in zwo andre BDGF, CEGF getheilt, und in jedem derselben stehen beyde paralleie Seiten auf einer der übrigen senkrecht. Man kan sich die Vorstellung machen, der abgekürzte Kegel entstehe, indem sich das Trapezium BDEC um seine Axe GF drehet, bis EC in BD, und BD hinwiederum in EC komt. Auf solche Art beschreibt BDGF die eine, und CEGF die andre Hälfte des abgekürzten Kegels, die Seite BD aber die eine Hälfte, und CE die andre Hälfte der krummen Oberfläche. Diese letzte wird allemahl ohne den Grundflächen verstanden, wenn in der Folge von der abgekürzten Kegelfläche die Rede ist.

Ein Rechteck, dessen eine Seite der Summe der Halbmesser der Grundflächen, die andre aber der

Seite des abgekürzten Kegels gleich ist, hiesse in der Folge das Rechteck der abgekürzten Kegelfläche.

608 §.

228 F. Den körperlichen Inhalt des abgekürzten Kegels $BDEC$ zu finden, wenn der Halbmesser $FB = r$ der grössern Grundfläche, und die Höhe des Körpers $GF = a$ nebst dem Neigungswinkel $DBF = \varphi$ der Seite gegen die Grundfläche gegeben sind.

Aufl. Wenn die verlängerte Seite BD die Axe FG in A schneidet: so ist AF die Höhe des zugehörigen ganzen Kegels, und GA die Höhe des abgeschnittenen Theils. Nun ist der ganze Kegel ABC $= \frac{1}{3}\pi rr . AF$, und der Kegel $ADE = \frac{1}{3}\pi . DG^2 . AG$ (373 §). Also ist der abgekürzte Kegel $ADEC = \frac{1}{3}\pi rr . AF - \frac{1}{3}\pi\, DG^2 . AG$. Nun sey DY auf BF senkrecht: so wird $BY = a \cot\varphi$, und $FY = DG = r - a\cot\varphi$. Ferner ist $AF = r \operatorname{tang}\varphi$, und $AG = r\operatorname{tang}\varphi - a$. Also wird des abgekürzten Kegels BDEC Inhalt $= \frac{1}{3}\pi(r^3 \operatorname{tg}\varphi - (r - a\cot\varphi)^3 \operatorname{tg}\varphi) = \frac{1}{3}\pi \operatorname{tang}\varphi(r^3 - (r - a\cot\varphi)^3)$.

609 §.

228 F. Die abgekürzte Kegelfläche $BDEC$ verhält
229 sich zur Fläche eines jeden ganzen Kegels STW, wie das Rechteck der abgekürzten Kegelfläche zum Rechteck der ganzen Kegelfläche.

Beweis. Wenn AB die Seite des ganzen Kegels ist, wovon BDEC abgeschnitten worden: so sey $HI = AB$, und $HK = BF$ auf HI senkrecht. Ferner $KL \# HI$, $IL \# HK$: so ist HKLI das Rechteck der

ganzen

ganzen Kegelfläche ABC. Ferner sey KM=DG, also HM=BF+DG, und HN=BD, also NI=AD; überdem MO∥HN, NO∥HM: so wird HMON das Rechteck der abgekürzten Kegelfläche BDEC. Man ziehe IK, welche NO in P schneidet, und durch P mit HI die Linie QR parallel: so ist HI: NI=HK:NP, oder AB:AD=BF:NP, also NP=AD×BF:AB=DG=MK. Weil nun MO=HN: so wird das Rechteck HP=KO (105§)=PL (108§) und NR ist das Rechteck der Kegelfläche ADE. Nun ist die Kegelfläche ABC:Kegelfläche ADE=HL:NR (606§). Also ABC−ADE: ADE=HL−NR:NR (189§). Ferner ist ABC −ADE= der abgekürzten Kegelfläche ADEC, überdem HL=KN+NR+PL=KN+NR+KO, also HL−NR=KN+KO=HMON: folglich wird BDEC: ADE=HMON:NR, oder BDEC:ADE =BD×(BF+DG):AD×DG. Endlich ist auch ADE:STW=AD×DG:ST×TV (606§), also BDEC:STW=BD×(BF+DG):ST×TV.

610. §.

Die abgekürzte Kegelfläche *BDEC* ist einem 228
Kreise *K* gleich, dessen Halbmesser *R* die mit- 229
lere Proportionallinie ist zwischen der Seite F.
BD der Kegelfläche, und der Summe der Halbmesser ihrer Grundflächen *BF* und *DG*.

Beweis. Es sey Q ein Kreis, dessen Halbmesser ϱ zwischen der Seite ST und dem Halbmesser TV der Grundfläche des ganzen Kegels STW die mittlere Proportionallinie ist: so hat man $R^2=BD\times(BF+DG)$ und $\varrho^2=ST\times TV$ (248§). Es ist aber BDEC : Kegelfl. STW = BD × (BF+DG) :ST

:ST × TV (589 §) = $R^2 : \rho^2$ = K:Q (255 §), und weil die Kegelfläche STW = Q (605 §): so wird BDEC = K.

611 §.

Abgekürzte Kegelflächen verhalten sich wie ihre Rechtecke. Denn sie verhalten sich wie die ihnen gleichen Kreise, also wie die Quadrate der Halbmesser dieser Kreise, denen jene Rechtecke gleich sind (248 §).

Eine abgekürzte Kegelfläche verhält sich zur Cylinder Fläche, wie das Rechteck jener Kegelfläche zum Rechteck durch des Cylinders Axe. Denn auch diese Flächen verhalten sich, wie die ihnen gleichen Kreise, also wie die Quadrate der Halbmesser dieser Kreise, folglich wie die genannten Rechtecke (248 §).

612 §.

230 F. Es sey AB ein Durchmesser des Kreises, dessen Mittelpunct C ist, und DE ein andrer Durchmesser, der auf dem vorigen senkrecht steht. In dem verlängerten Halbmesser CD sey ein Punct F genommen, und durch denselben ziehe man ein paar Tangenten des Kreises, FH, und FK (126 §) so, daß G und I die Berührungspuncte sind. Man nehme auf der andern Seite dieser Berührungspuncte GH = IK, und ziehe HK; so wird FHK ein gleichschenklichtes Dreyeck (127 §) dessen Grundlinie von CF senkrecht in O halbirt wird. Die Sehne GI wird ebenfalls von CF bey N senkrecht halbirt.

Wenn nun der Kreis sich nebst dem Dreyeck um die Axe EF drehet: so beschreibt der Kreis eine Kugel (389 §), und das Dreyeck einen senkrechten Kegel (366 §), GI aber wird der Durchmesser eines

Pa-

Parallelkreises der Kugel, dessen Umfang zugleich in der Kugel- und Kegelfläche liegt. Uebrigens aber fällt jeder andre Punct der Kegelfläche, der nicht im Umfang des Parallelkreises liegt, ausserhalb der Kugel. Denn ein solcher Punct wie H, mag in der Kegelfläche liegen, wo er wolle: so lege man durch ihn, und die Axe FE, eine Ebene. Diese schneidet die Kegelfläche in einer graden Linie HF. Nun mag H entweder mit F auf einer, oder verschiedenen Seiten des Parallelkreises liegen: so trift doch HF den Umfang des Kreises irgendwo in einem Puncte, wie G. Denn aber ist CG auf FH senkrecht, weil CG so, wie auch FG mit der Ebene des Parallelkreises allemahl gleiche Winkel macht, wo auch der Punct G im Umfang desselben genommen wird. Demnach ist CH ▷ CG, und H fällt ausserhalb der Kugel.

Die Kegelfläche stöst also auf ihrer inwendigen hohlen Seite mit der Kugelfläche so zusammen, daß kein Punct von ihr innerhalb der Kugel fällt, und man sagt in dem Fall, daß beyde **Flächen einander berühren**: und zwar wird in dem jetzt erwogenen Fall die Kegelfläche von der Kugel, **von innen berührt**. Sonst kan die Kugel auch die Kegelfläche **von aussen berühren**, und man siehet leicht, daß beyde Flächen in dem letzten Fall nur einen Punct gemein haben können, da sie sich gegentheils in dem ersten Fall in einem Kreise berühren, der eben deswegen der **Berührungskreis** genannt wird.

613 §.

Wenn eine Kugel die Kegelfläche von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Axe der Kegelfläche halbirt:

so ist die Kegelfläche einer eben so hohen Cylinder Fläche gleich, die eine dem grösten Kreisse der Kugel gleiche Grundfläche hat.

230 F. Beweis. Wenn in der Zeichnung des vor. § GH=GF, also auch IK=IF genommen wird: so wird auch ON=NF, und die Ebene des Berührungskreises halbirt die Höhe OF des Kegels. Man ziehe auch durch A und B Tangenten des Kreises, welche HK in P und Q schneiden, und durch F mit AB die Parallele LM, welche diese beyde Tangenten in L und M schneidet; so stellet PLMQ den Schnitt durch die Axe eines graden Cylinders vor, dessen Höhe =OF, und dessen Grundfläche Durchmesser PQ dem Durchmesser der Kugel AB gleich ist.

Es sey HV mit dem Durchmesser GT parallel, und werde von DE in V geschnitten: so hat man FG: FH = GC: HV, folglich ist HV = 2GC = AB = PQ. Ueberdem wird HV: HO = HF: FO (214 §), oder PQ: HO = HF: PL. Also PQ × PL = HO × HF (199 §). Demnach ist das Rechteck der Cylinderfläche dem Rechteck der gleich hohen Kegelfläche gleich, woraus beyder Flächen Gleichheit folgt (606 §).

614 §.

231 F. Die abgekürzte Kegelfläche ist einer eben so hohen Cylinderfläche gleich, wenn die Grundfläche des Cylinders dem grösten Kreise der Kugel gleich ist, so die Kegelfläche von innen berührt, und der Berührungskreis die Höhe der abgekürzten Kegelfläche halbirt.

Beweis. Wenn AB, ED wie vorhin, ein paar senkrechte Durchmesser des Kreises um C sind, so ziehe man durch einen beliebigen Punct G des Quadranten

branten AD eine Tangente, und nehme auf derselben GH = GR; die Sehne GI sey mit AB parallel, durch I ebenfalls eine Tangente gezogen, und auf derselben IK = IS = GH genommen. Man ziehe HK, und durch F mit HK die Parallele RS; so ist der Winkel RGI = GIS = RHK = HKS, und das Trapezium stellet den Schnitt durch die Axe eines abgekürzten Kegels vor (607 §), dessen Fläche die Kugel, wovon ADBE ein gröster Kreis ist, berührt. Des Berührungskreises Durchmesser ist GI, und die Ebene desselben halbirt die Höhe OF des abgekürzten Kegels bey N. Wenn nun auch durch A und B ein paar Tangenten gezogen sind, welche HK in P und Q, RS aber in L und M schneiden: so ist PLMQ der Schnitt durch die Axe eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe = OF, und dessen Grundfläche so groß, als der gröste Kreis der berührenden Kugel ist, weil PQ = AB. Es sey nun RV auf HK senkrecht, so wird CGN + NGR = R = CGN + GCN, also NGR = RHV = GCN, und das Dreyeck HRV ∽ CGN; folglich HR : RV = CG : GN = GT : GI (181 §), oder HR : PL = PQ : OH + FR (206 §) und HR × (OH + FR) = PL × PQ. Demnach sind die Rechtecke der Kegel- und Cylinderfläche, folglich die Flächen selbst, gleich (611 §).

Der XXVIII. Abschnitt.

Von der Kugelfläche und den Abschnitten und Ausschnitten der Kugel.

615 §.

232 F. Es sey EDM ein Kreisbogen, der in den Puncten F, G, H, D, I, K, L in eine beliebige grade Anzahl gleicher Theile getheilt ist. Durch den ersten Theilungspunct F ziehe man eine Tangente des Kreises, welche den Halbmesser CE in N schneidet; so ist FN des Bogens FE Tangente (407 §). Man nehme FO = FN, und ziehe durch O die zwote Tangente (126 §): so geht diese durch H, und FO wird des Bogens FG, HO des Bogens HG Tangente. Man nehme wiederum HP = HO, und ziehe durch P die zwote Tangente: so geht diese durch I. Nimt man wieder IQ = IP, und fährt mit Verzeichnung der Tangenten auf eben die Art fort, so wird die Tangente durch den letzten Theilungspunct L den Halbmesser CM in R so schneiden, daß auch LR = FN = FO, u. s. f. wird.

Weil nun die Anzahl der Theilungspuncte grade ist: so wird einer von diesen Puncten D den Bogen EDM halbiren. Aber durch D geht keine von den Tangenten durch. — Weil nemlich von E bis M $(2n+2)$ Puncte sind: so sind von E bis D $(2n+1)$ Puncte, und D ist kein Berichtigungspunct. Allein der Halbmesser CD geht durch den Durchschnittspunct P der beyden durch H und I gezogenen Tangenten.

Nun

Nun sey der Durchmesser AB auf CD senkrecht, und man ziehe durch A und B ein paar Tangenten, durch P aber mit AB die Parallele VX. Endlich ziehe man die Linien NR, OQ, u. s. f., welche die durch A und B gezogenen Tangenten, in S, T, Y, Z schneiden: so giebt sich ein Rechteck SVXT. Drehet sich nun die ganze Figur um die Axe CB: so wird aus dem Dreyeck OPQ ein Kegel, aus NOQR ein abgekürzter Kegel, u. s. f. aus SVXT aber ein Cylinder, dessen Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel gleich ist, seine Höhe aber der Höhe aller Conischen Körper, die die Kugel umgeben, zusammengenommen.

Die Cylinderfläche *SVXT* ist so groß, als die Summe aller Conischen Flächen *NOPQR* zusammen. Denn es ist die Fläche OPQ = YVXZ (613 §), Die Fläche NOQR = SYZT (614 §) u. s. f. Also die Summe der Conischen gleich der ganzen Cylindrischen Fläche.

616 §.

Die Sehne EM in der Zeichnung des vor. § wird der Durchmesser eines Parallelkreises, und CD geht durch seinen Mittelpunct W. Das Stück der Kugel zwischen dem Parallelkreis EM, und dem von EDM beschriebenen Theil der Kugelfläche, heist ein Abschnitt der Kugel, und das Stück PW der Axe des Parallelkreises EM, so in diesen Abschnitt fällt, die Höhe des Kugelabschnitts. Die Conischen Flächen NOPQR kan man um den Kugel-Abschnitt *EDM* beschriebene, nennen.

Die Summe *NOPQR* der um den Kugel Abschnitt beschriebenen Conischen Flächen ist

gröſſer, als die Kugelfläche *EDM* des Abschnitts. Weil nemlich FN > FE ist (127 §): so siehet man leicht, daß das Stück der Conischen Fläche zwischen den Kreisen FL, und NR, gröſſer seyn werde, als das Stück der Kugelfläche zwischen FL, und EM, u. s. f.

Wäre mit dem Halbmesser CN ein Kreisbogen durch die Puncte N, O, P, Q, R beschrieben, als der Schnitt durch die Axe eines neuen Kugel-Abschnitts: so würde die Summe der in diesem Kugel-Abschnitte beschriebenen Conischen Flächen *NOPQR* kleiner seyn, als die Kugelfläche dieses neuen Kugel-Abschnitts, dessen Halbmesser *CN*.

617 §.

Wenn der Kugel-Abschnitt *EDM* kleiner als die Halbkugel ist: so ist das zugehörige Stück der Kugelfläche so groß, als eine Cylinderfläche von eben der Höhe, deren Grundfläche dem gröſten Kreise der Kugel gleich ist.

232 F. Beweis. In der letzten Zeichnung schneide EM die Tangente durch A und B in α und β, und durch D sey die Tangente $\gamma\delta$ gezogen: so giebt sich ein Rechteck $\alpha\gamma\delta\beta$, als der Schnitt durch die Axe eines Cylinders, dessen Höhe = WD, und dessen Grundfläche dem gröſten Kreise der Kugel um C gleich ist.

Nun sey die Kugelfläche des Abschnitts EDM = S, und S > $\alpha\gamma\delta\beta$. Wenn demnach $\alpha\gamma\delta\beta : S = \alpha\gamma : \alpha\varepsilon$; so wird $\alpha\varepsilon > \alpha\gamma$ seyn. Man ziehe $\varepsilon\zeta$ mit $\alpha\beta$ parallel: so wird das Rechteck $\alpha\varepsilon\zeta\beta$ der Schnitt durch die Axe eines Cylinders, der mit $\alpha\gamma\delta\beta$ einerley Grundfläche, aber eine gröſſere Höhe hat. Also

ist,

ist $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \alpha\gamma\delta\beta : \alpha\varepsilon\zeta\beta$, und $S = \alpha\varepsilon\zeta\beta$. Nun ist auch $A\varepsilon > A\gamma$, oder $A\varepsilon > AC$: man halbire also den Bogen ED so lange, bis man auf ein Stück EF komt, dessen Secante $CN < A\varepsilon$ ist (412 §). Man nehme FO = FN, und ziehe die übrigen Tangenten, wie im 615 §, so ist auch $CP < A\varepsilon$, und $WP < \alpha\varepsilon$, weil $CW = A\alpha$. Durch P sey $VX \# \alpha\beta$: so giebt $\alpha VX\beta$ einen Cylinder; die Tangenten durch F, H, u. s. f. aber werden um den Kugel-Abschnitt beschriebene Conische Flächen, wenn sich die Figur um die Axe CP drehet. Es fällt aber α nothwendig unter S, weil $D\varepsilon <$ Quadrant ist, also ist $SV < \alpha V$, und αV, oder $WP < \alpha\varepsilon$, also auch $SV < \alpha\varepsilon$, folglich die Cylinderfläche $SVXT < \alpha\varepsilon\zeta\beta$. Da nun SVXT = NOPQR (615 §) und $\alpha\varepsilon\zeta\beta = S$; so wäre $NOPQR < S$, welches dem 616 § zuwider ist.

Es sey nun $S < \alpha\gamma\delta\beta$, und man setze, es sey $\alpha\gamma\delta\beta : S = CA : CN$, so ist $CN < CA$. Mit dem Halbmesser CN sey nun ein Kreis NOP beschrieben, und durch N und P mit CD die Parallelen NI, PK gezogen, welche EM in H und L schneiden, so wird HIKL der Schnitt durch die Axe eines neuen Cylinders, und man hat CA : CN = die Fläche $\alpha\gamma\delta\beta$: HIKL (598 §) also $\alpha\gamma\delta\beta : S = \alpha\gamma\delta\beta$: HIKL, und S = HIKL. Man halbire den Bogen ED so oft, bis man auf ein Stück EF komt, dessen Cosinus CG > GN wird (402 §). Sein Sinus EG wird durch den folgenden Theilungspunct η gehen, und man kan die Sehne $\varepsilon\eta$ halb so vielmahl in dem Bogen EDM herum tragen, als man Theilungspuncte hat. Mit dem Halbmesser CG beschreibe man einen Kreis QRS. Dieser wird alle Sehnen in G, T, u. s. f. berüh-

berühren, so daß $EG = G\eta = \eta T$ u. s. f. wird. Durch Q und S sey QX und SV mit CD parallel, QX schneide $\alpha\beta$ in Y, SV aber in Z, so ist die Fläche HIKL $\prec$ YXVZ, und YXVZ = den Conischen Flächen $E\eta D\mu M$, also HIKL $\prec E\eta D\mu M$, oder S $\prec E\eta D\mu M$, welches ebenfalls dem 616 § entgegen ist.

618 §.

Die krumme Oberfläche der Halbkugel ist der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. (Die ebenen Grundflächen dieser Körper werden hier, wie bisher allemahl geschehen ist, nicht gerechnet).

232 **Beweis.** Wenn in der 232 F. im vor. § DE
233 ein Quadrant ist: so fällt E in A, M in B, und die
F. Figur leidet keine andre wesentliche Veränderung, als daß die Puncte E, α, und S in A, M, β und T in B zusammen fallen. Demnach bleibt in der ersten Abtheilung des Beweises alles übrige, wie vorhin; nur wird $SV = \alpha V$, weil aber noch αV, oder $WP \prec \alpha\varepsilon$, so bleibt auch $SV \prec \alpha\varepsilon$, und alle übrige Schlußfolgen bleiben stehen. In der zweeten Abtheilung des Beweises leidet die 233 F. keine andre Veränderung, als daß wiederum E in A, B in M, und die Puncte α, Y, H, L, Z, β, nach der Ordnung in A, Q, N, P, S, B, fallen, und alle Schlußfolgen lassen sich ungeändert auf diesen Fall anwenden.

619 §.

Die ganze Kugelfläche ist so groß, als eine Cylinderfläche, die den grösten Kreis der Kugel zur Grundfläche, und den Durchmesser zur Höhe hat.

Auch

Auch ist eines jeden Kugel-Abschnitts Oberfläche, wenn er gleich die Größe einer Halbkugel übertrift, so groß, als die Oberfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche dem größten Kreise, und dessen Höhe der Höhe des Abschnitts gleich ist.

Beweis. Um den Kreis, dessen senkrechte Durchmesser AB, DG sind, sey das Quadrat LHIK beschrieben. Die grade Linie MEOFN aber sey mit AB parallel; die Figur drehe sich um die Axe DG. Nun ist die Halbkugelfläche ADB = der Cylinderfläche AHIB, also die ganze Kugelfläche ADBG = der Cyl. Fläche HIKL. Da nun überdem die Fläche des Abschnitts EGF = der Fläche LMNK: so wird ADGB − EGF = HOKL − LMNK, oder die Fläche des Abschnitts EADBF = der Cyl. Fläche HMNI. 234 F.

620 §.

Die ganze Kugelfläche ist viermahl größer, als die Fläche ihres größten Kreises.

Beweis. Die mittlere Proportionallinie zwischen LH und LK ist = AB, weil sowohl LH, als auch LK selbst = AB. Nun ist die Cylinderfläche HIKL, also auch die Kugelfläche ADBG (614 §) einem Kreise gleich, dessen Halbmesser = AB (599 §) dessen Durchmesser also = 2AB ist. Da nun Kreise sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten: so verhält sich die Kugelfl. ADBG: Kreisfl. APBQ = $(2AB)^2 : AB^2 = 4AB^2 : AB^2 = 4 : 1$, und es wird die Kugelfl. ADBG = 4 APBQ. 234 F.

621 §.

Die Oberfläche eines Kugel-Abschnitts *EADBF* ist so groß, als ein Kreis, dessen Halb-

Halbmesser die Sehne *DE* des grösten Kreisbogens *DAE* ist, zwischen dem Pol des Abschnitts *D*, und dem Umfang der Grundfläche.

Beweis. Man ziehe auch EG, so ist DEG = R (123 §). Das Dreyeck DEG ∽ DEO, und DG: DE = DE: DO (214 §), oder MN: DE = DE: HM. Also ist ein Kreis mit dem Halbmesser DB beschrieben der Cylinderfl. MHIN (579 §); folglich der Fläche des Kugel-Abschnitts EADBF gleich (599 §).

622 §.

234 F. Ein Stück der Kugelfläche, das zwischen zweenen Parallelkreisen APBQ, ERFS enthalten ist, wird eine Zone der Kugelfläche genant.

Die Oberfläche einer solchen Zone ist der Oberfläche des Cylinders AMNB gleich, der mit der Zone einerley Höhe AM, und den grösten Kreis der Kugel zur Grundfläche hat. Denn es ist die Oberfl. ALKB = AGB, MLKN = EGF, also ALKB — MLKN = AGB — EGF, oder AMNB = AEFB.

623 §.

235 236 F. Man kan in, und um jeden Kugel-Abschnitt XDY eben so, wie in, und um die Halbkugel im 389 § so viele gleich hohe Cylinder beschreiben, daß ihr Unterscheid von dem Kugel-Abschnitt kleiner wird, als jeder gegebene Körper.

Wenn also ein Körper kleiner, als der Kugel-Abschnitt ist: so kan man in demselben so viele gleich hohe Cylinder beschreiben, daß ihre Summe grösser, als dieser Körper wird.

Ist

Ist aber ein Körper größer, als der Kugel-Abschnitt: so kan man um denselben so viel gleich hohe Cylinder beschreiben, daß ihre Summe kleiner, als dieser Körper wird.

624 §.

Der körperliche Inhalt eines Kugel-Abschnitts *HEI*, der kleiner ist, als die Halbkugel, ist so groß, als der Unterscheid zwischen dem Inhalt eines graden Cylinders *KFGL* und abgekürzten Regels *FMNG*; wenn alle drey Körper gleich hoch sind, des Cylinders und Regels Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel gleich, und der Neigungswinkel *MFG* der Seite des abgekürzten Regels gegen die Grundfläche, ein halber rechter Winkel ist.

Beweis. Es sey ADBE ein grösster Kreis durch die Axe ED des Kugel-Abschnitts AB in dieses grösten Kreises Ebene auf ED senkrecht, und F*ab*G ein Quadrat um diesen Kreis. Zieht man nun die Linien CF, CG, welche HI, der Grundfläche des Abschnitts Durchmesser, in der Ebene ADBE in M und N schneiden, und verlängert HI bis an die Seiten des Quadrats in K und L; so stellt FKLG des Cylinders, und FMNG des abgekürzten Kegels Schnitt durch die Axe EZ vor, und die Dreyecke FKM, NLG die Durchschnittsfigur eines Körpers, der übrig bleibt, wenn der abgekürzte Kegel FMNG aus dem Cylinder FKLG ausgeschnitten wird. Er ist also die Differenz zwischen dem Cylinder, und abgekürzten Kegel, und daß eben dieser Körper dem Kugel-Abschnitt EHI gleich sey; erhellet auf folgende Art. 235 F.

Dafern der Körper FKMNLG $\prec$ EHI ist: so nehme man $D\lambda = EZ$, und ziehe XY durch λ mit HI parallel; so wird XDY der Schnitt durch die Axe eines Kugel-Abschnitts, der dem vorigen EHI gleich ist. Man beschreibe in diesem Kugel-Abschnitt so viele gleich hohe inwendige Cylinder ST, VW u. s. f. daß ihre Summe S größer, als *FKMNLG* wird (623 §). Die Höhe EZ des Abschnitts EHI theile man bey ι, $\varkappa$, u. s. f. in eben so viel gleiche Theile, als man in $D\lambda$ hat, und ziehe durch die Theilungspuncte mit HI Parallelen, welche AF in O, Q; MF in α, β; NG in γ, δ; LG in P, R schneiden. Aus α, β, γ, δ ziehe man über OP, QR senkrechte Linien aufwärts bis an die nechste Parallele, nemlich $\alpha\varepsilon$, $\beta\zeta$, $\gamma\eta$, $\delta\vartheta$ u. s. f.: so stellen $O\varepsilon\eta P$, $O\zeta\vartheta R$, Schnitte durch die Axe Cylindrischer Röhren vor, wie im 393 §, und man erhält ihrer so viele als im Kugel-Abschnitt XDY inwendige Cylinder vorhanden sind. Nun ist $W\nu^2 = D\nu \times \nu E$ (214 §) und $D\nu = E\varkappa = FQ = Q\beta$, also auch $\nu E = \beta R$, und $W\nu^2 = Q\beta \times \beta R$. Ferner ist $T\mu^2 = D\mu \times \mu E$, (214 §) und $D\mu = E\iota = OF = O\alpha$, also auch $\mu E = \alpha P$, und $T\mu^2 = O\alpha \times \alpha P$. Demnach ist

Cyl. VW = Röhre $Q\zeta\vartheta R$

Cyl. ST = Röhre $O\varepsilon\eta P$.

Also wäre S = der Summe aller Röhren, und S $\prec$ FKMNLG, welches mit der Voraussetzung streitet.

236 F. Wäre der Körper FKMNLG $\succ$ EHI: so beschreibe man um den Kugel-Abschnitt XDY = EHI so viele auswendige Cylinder, daß ihre Summe S kleiner, als FKMNLG wird. Nachdem nun EZ in eben so viel gleiche Theile, wie $D\lambda$ getheilt, und die Paral-

lelen

lelen OP, QR u. s. f., wie vorhin gezogen worden: so ziehe man nun durch M, α, β, N, γ, δ die senkrechten Linien Mε, αζ, βη, Nϑ, γπ, δϱ unterwärts, bis an die nechste Parallele, da man denn so viele Röhren erhält, als auswendige Cylinder um die Halbkugel XDY vorhanden sind. Es erhellet aber wie vorhin, daß der

Cyl. VW = Röhre FβδG

Cyl. TV = Röhre QαγR

Cyl. XS = Röhre OMNP

also S = der Summe aller Röhren, folglich S > FKMNLG sey, welches wiederum der Voraussetzung entgegen ist.

Es folgt hieraus, daß der Körper FKMNLG dem Kugel-Abschnitt EHI gleich sey.

625 §.

Wenn ein Kugel-Abschnitt *EHI* kleiner ist, als die Halbkugel: so ist der körperliche Inhalt einem Kegel gleich, dessen Grundfläche so groß ist, als des Abschnitts Grundfläche, die Höhe aber so groß, als die Summe der Höhe *EZ* des Abschnitts, und der vierten Proportionallinie zur Höhe *DZ*, des andern Abschnitts, so den vorigen zur ganzen Kugel ergänzt, zum Halbmesser der Kugel *r*, und der eigenen Höhe *EZ* des Abschnitts. 235 F.

Beweis. Es ist der Abschnitt EHI = Cyl KFGL — abg. Keg. FMNG (624 §). Man setze EZ = *a*: so ist DZ = $2r - a$, und HZ = $\sqrt{EZ \times DZ} = \sqrt{(2ar - aa)}$. Nun hat man Cyl KFGL = πarr, und der abg. Kegel FMNG = $\frac{1}{3}\pi(r^3 - (r-a)^3)$

$= \frac{1}{3}\pi(3arr - 3aar + a^3) = \pi arr - \pi dar + \frac{2}{3}\pi a^3$ (588 §), weil hier $\varphi = 45°$ (624 §), also tang $\varphi = \cot\varphi = 1$. Dies giebt den Inhalt EHI $= \pi aar - \frac{1}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\pi a(3ar - aa) = \frac{1}{3}\pi a(2r - a) \times \frac{3ar - aa}{2r - a} = \frac{1}{3}\pi(2ar - aa) \times \left(a + \frac{ar}{2r - a}\right)$. Weil nun $2ar - aa = HZ^2$, so wird der Inhalt EHI $= \frac{1}{3}\pi . HZ^2 . \left(EZ + \frac{EZ.r}{DZ}\right)$, wo $\pi . HZ^2$ der Inhalt der Grundfläche HI des Abschnitts ist, und $\frac{EZ.r}{DZ}$ die vierte Proportionallinie zur Höhe des Abschnitts HDI, dem Halbmesser der Kugel, und des Abschnitts HEI Höhe. Ein Kegel aber auf eben der Grundfläche in der Höhe $EZ + \frac{EZ.r}{DZ}$ hat eben den Inhalt (373 §).

626 §.

Der Satz des vor. § gilt auch für Abschnitte die grösser, als Halbkugeln sind.

Beweis. Es ist die ganze Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$ (394 §). Also der Abschnitt DHI $= \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi aar + \frac{1}{3}\pi a^3$, wo $a = 2r - DZ$ ist. Man setze $DZ = b$: so ist $a = 2r - b$, $aa = 4rr - 4br + bb$ und $a^3 = 8r^3 - 12r^2 b + 6rbb - b^3$. Folglich wird DHI $= \pi bbr - \frac{1}{3}\pi b^3 = \frac{1}{3}\pi(2br - bb)\frac{3br - bb}{2r - b} = \frac{1}{3}\pi(2br - bb) \times \left(b + \frac{br}{2r - b}\right)$, oder DHI $= \frac{1}{3}\pi HZ^2 \times \left(DZ + \frac{DZ.r}{EZ}\right)$.

627 §.

627 §.

Wenn PQ eine Axe der Kugel ist, worin zweene gröste Kreise PAQ, und PDQ einander schneiden; so kan das Stück der Kugel zwischen den Ebenen zweener halben grösten Kreise PAQ und PDQ, und dem zugehörigen Stück der Kugelfläche PAQD ein keilförmiger Ausschnitt der Kugel heissen. Und, wenn ADB ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Axe PQ senkrecht steht: so kan man das Stück der Kugel zwischen den Ebenen ACP, DCP, und ACD ein Pyramidenförmiges Kugelstück nennen, da dann CP die Höhe, und ACD die Grundfläche desselben ist. 237 F.

628 §.

Keilförmige Ausschnitte von einerley Kugel *PAQCD*, *PAQCE*, und Pyramidenförmige Stücke von einerley Kugel, die gleiche Höhen haben, wie *ACDP*, und *ACEP*, verhalten sich, wie die Winkel *ACD*, *ACE*, unter welchen sich die Seitenflächen an der Axe der Kugel schneiden.

Auch die krummen Oberflächen dieser Körper verhalten sich eben so gegen einander.

Beweis. Wenn AF der Kreisbogen AD und AE gemeinschaftliches Maaß ist, und AF=FG=GD=DH u. s. f.: so lege man durch F, G, H, u. s. f. ebenfalls gröste Kreise, und es erhellet, daß hiedurch sowohl die keilförmigen Ausschnitte, als auch die Pyramidenförmige Kugelstücke, nebst ihren krummen Oberflächen, in eben so viel gleiche Theile ver-

theilt werden, als die Bogen AD und AE enthalten. Also verhalten sich die Kugelstücke, und ihre krummen Oberflächen, wie die Bogen AD, AE (172 §) oder, wie die Winkel ACD, ACE. Wären die Bogen AD und AE incommensurabel: so könte man AE in so viele gleiche Theile, als man will, eintheilen, und man erhält ein Paar rationale Grenzen, zwischen welchen AD fällt; da dann die Körper ACDP und APCDQ, und ihre krummen Oberflächen ein paar Grenzen fallen, die sich gegen ACEP, und APCEQ, und dieser Körper Oberflächen, wie die zugehörigen Bogen zu AE verhalten. Der Unterscheid dieser rationalen Grenzen kan so klein gemacht werden, als man will; also behält der Satz auch in diesem Fall seine Richtigkeit (175 §).

Wenn also ILMN, ADEB Parallelkreise sind, denen die Axe PQ zugehört: so verhalten sich auch ein Paar vierseitige Stücke der Kugelfläche, wie ADLI, AEMI zwischen diesen Parallelkreisen, und den auf ihnen senkrechten Bogen gröster Kreise AI, DL, EM, wie die zugehörigen Bogen der Parallelkreise IL:IM, oder AD:AE (180 §), oder die Winkel der gröstен Kreise. Eben so verhalten sich die zugehörigen Kugelstücke zwischen den Ebenen dieser Kreisbogen.

Der Inhalt, und die krumme Oberfläche aller Kugelstücke von dieser Art läst sich also nunmehro leicht berechnen, da man den Inhalt und die Oberfläche der ganzen Kugel nicht allein; sondern auch der Abschnitte, und Zonen der Kugel nach dem 396. 625. 626. 621. 622 § zu berechnen weiß.

629 §.

Wenn auf der Grundfläche ADBE eines Kugel-Abschnitts ADBEF ein grader Kegel steht, dessen Spitze C in der Kugel Mittelpunct fällt; so schliest die Kegelfläche mit der Kugelfläche des Abschnitts einen kegelförmigen Ausschnitt der Kugel ein. 238 F.

630 §.

Ein kegelförmiger Ausschnitt der Kugel ist so groß, als ein Kegel, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel, und die Grundfläche der Kugelfläche *AFB* des Ausschnitts gleich ist.

Beweis. Es sey $FG = a$, und der Kugel Halbmesser $= r$; so ist der Abschnitt $ADBEF = \pi aar - \frac{1}{3}\pi a^3$ (625 §). Weil ferner $BG^2 = 2ar - aa$, die Kreisfläche $ADBE = \pi(2ar - aa)$, und $CG = r - a$; so wird der Kegel $CADBE = \frac{1}{3}\pi(2ar - aa)(r - a)$ (373 §) $= \frac{1}{3}\pi(2ar^2 - 3a^2r + a^3) = \frac{2}{3}\pi ar^2 - \pi a^2 r + \frac{1}{3}\pi a^3$, folglich der Kugel Ausschnitt $= \frac{2}{3}\pi ar^2$. Man ziehe AF, so wird $AF^2 = AG^2 + FG^2 = 2ar - aa + aa = 2ar$, und ein Kreis mit dem Halbmesser AF beschrieben ist $= \pi . AF^2 = 2\pi ar$. So groß ist die Oberfläche des Abschnitts AEDBF (621 §). Ein Kegel auf einer eben so grossen Grundfläche in der Höhe $CF = r$, wäre $= \frac{2}{3}\pi arr$ (373 §), folglich eben so groß, als der Kugel Ausschnitt CABEDF. Der Beweis gilt eigentlich, wenn der Ausschnitt kleiner, als die Halbkugel ist. Er läst sich aber leicht auf solche Ausschnitte erweitern, die grösser sind, als Halbkugeln. Es ist nemlich die Oberfläche des Abschnitts, der den

vorigen zum ganzen Kegel ergänzt, einem Kreise gleich, dessen Halbmesser $= r((2r-a)^2 + 2ar - aa)$ (621 §) $= r(4rr - 2ar)$, also diese Oberfläche $= 4\pi rr - 2\pi ar$, und ein Kegel auf einer gleichen Grundfläche, in der Höhe CF wird $= \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi arr$. Aber der Ausschnitt, welcher den vorigen CADBEF zur ganzen Kugel ergänzt, ist ebenfalls $= \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi ar^2$.

In einerley Kugel verhalten sich also diese Art Ausschnitte gegen einander, wie die zugehörigen Stücke der Kugelfläche, und die ganze Kugel ist einem Kegel gleich, auf einer Grundfläche, die so groß ist, als die ganze Kugelfläche in der Höhe des Halbmessers.

631 §.

Die Seite eines Würfels zu finden, der einem gegebenen geometrischen Körper gleich ist, vorausgesetzt, daß es einer von denjenigen Körpern sey, dessen Inhalt nach den bisher vorgetragenen Lehren der körperlichen Geometrie gefunden werden kan.

Aufl. Man suche den Inhalt des gegebenen Körpers in Cubikfüssen oder Cubikzollen, und ziehe aus der Zahl, welche diesen Inhalt ausdrückt, die Cubikwurzel, entweder vermittelst der Logarithmen (162 §), oder wenn man mehr Schärfe verlangt, nach dem 105 §. Diese Wurzel drückt die Seite des gesuchten Würfels in Füssen oder Zahlen, oder überhaupt in eben demjenigen Längen-Maaß aus, welches bey Berechnung des Inhalts des gegebenen Körpers ist gebraucht worden.

Man

Man braucht hier eine ähnliche Redensart, wie bey der ähnlichen Aufgabe für ebene Figuren 481 §. Man nennt dies den gegebenen Körper cubiren, und die bisherigen Lehren ergeben, daß die Cubatur des Cylinders, des Kegels, der Kugel und der Kugelstücke von der Quadratur des Kreises abhänge. Je genauer man die Grundflächen des Cylinders, des Kegels, imgleichen die Fläche des grösten Kreises der Kugel, vermittelst des Verhältnisses $\pi : 1$ (467 §) berechnet, desto genauer wird der Inhalt der genannten Körper gefunden. Wenn man aber auch diesen Inhalt allemahl genau haben könnte, so würde man sich doch bey Berechnung der Seite des eben so grossen Würfels in unzähligen Fällen mit einer blossen Näherung begnügen müssen, wenn nemlich die Zahl, welche den Inhalt ausdrückt eine unvollkommene Cubikzahl ist. Weil man voraussetzen kan, daß sich die Seite des dem Körper gleichen Würfels allemahl ohne Schwierigkeit durch Rechnung finden lasse, wenn nur sein Inhalt bekannt ist, so nennt man auch das schon den Körper cubiren, wenn man seinen Inhalt sucht.

Will man die Cubatur einer Kugel, deren Durchmesser gegeben ist, aus dem bekannten Verhältnis zwischen dem Würfel des Durchmessers und dem Inhalt der Kugel sehr genau finden, so ist noch zu bemerken, daß das im 396 § angegebene Verhältnis, welches man gemeiniglich annimt, noch um ein merkliches zu klein sey. Ist nemlich der Kugel Durchmesser $= d$, so ist die Fläche des grösten Kreises $= \frac{1}{4}\pi dd$ (475 §), und der Kugel Inhalt $= \frac{1}{4}\pi dd \times \frac{2}{3}d$ (396 §) $= \frac{1}{6}\pi d^3$. Setzt man nun $\frac{1}{6}\pi d^3 = S$, so hat man $d^3 : S = 1 : \frac{1}{6}\pi = 3 : \frac{1}{2}\pi =$

3:1,5707963267 94 u. s. f. Weil $\frac{1}{6}\pi =$ 0,5235987755 98 u. s. f., so darf man nur den Würfel des Durchmessers mit dieser Zahl multipliciren, und man nimt so viele von diesen Ziffern, als der jedesmahl erforderlichen Schärfe gemäß ist. Metii Verhältniß $\pi : 1 = 355 : 113$ (285 §) giebt $\frac{1}{6}\pi = \frac{355}{678}$, also $d^3 : S = 678 : 355$, und dies Verhältniß läst sich in den meisten Fällen vortheilhaft brauchen, weil es viel genauer ist, als das gewöhnliche 300:157.

632 §.

Die Auflösung der Aufgabe des vorigen § würde mehr Schwierigkeit haben, wenn man die Seite des verlangten Würfels durch geometrische Verzeichnung suchen wollte, so wie die gegebene Auflösung eigentlich arithmetisch ist. Die alten Geometer suchten die Auflösung dieser und ähnlicher Aufgaben allemahl durch Zeichnung, und es war unter ihnen vornemlich das so genannte Delphische Problem berühmt. Das Orakel zu Delphos soll den Athenienſern, welche bey Gelegenheit einer zu Athen graßirenden Pest den Apoll befragen lieſſen, durch welche Mittel sie die Götter versöhnen könten, geantwortet haben: sie sollten dem Apoll einen doppelt so grossen cubischen Altar bauen, als derjenige gleichfalls cubische Altar war, den er damals hatte. Dies soll die damaligen Geometer bewogen haben, die Auflösung der Aufgabe zu suchen:

Es ist die Seite eines Würfels gegeben, man soll die Seite eines andern finden, der doppelt so groß, als der gegebene ist.

Wenn *l* die gegebene Seite und L die gesuchte ist, so verlangt die Aufgabe, daß $L^3 = 2l^3$ seyn soll,

oder

oder es soll sich verhalten $l^3 : L^3 = 1 : 2 = l : 2l$. Demnach soll das Verhältniß $l : 2l$ dreymahl größer seyn, als das Verhältniß $l : L$ (242. 347 §), und es ist L die erste von zwoen mittlern stetigen Proportionallinien zwischen l und $2l$ (241 §). Daher kam die geometrische Auflösung des delphischen Problems darauf an, daß man zwischen zwoen gegebenen Linien zwey mittlere stetige Proportionallinien suchen muste. Weil sich nun diese Aufgabe nicht geometrisch auflösen läst, dafern man keine andre krumme Linie, als allein den Kreis zu Hülfe nimt, wie bey weiterer Ausführung der theoretischen Mathematik bewiesen werden soll; so gehört sie schon zur höhern Geometrie (51 §). Man würde übrigens auf eben die Art die Seite eines Würfels finden können, der zum gegebenen ein jedes andres Verhältniß hat.

Will man die Rechenkunst zu Hülfe nehmen, so ist diese Aufgabe nur ein besondrer Fall der Aufgabe des vor. §. Man berechnet den Inhalt des gegebenen Würfels, duplirt ihn, oder verändert ihn sonst in dem gegebenen Verhältniß. Wenn man nun aus der Zahl, die herauskomt, die Cubikwurzel sucht, so ist die Seite des verlangten Würfels gefunden.

Verzeichniß
der im ersten Theil eingeschlichenen Druckfehler, und Verbesserungen.

In der Vorrede auf der 5 Seite in der 4 Zeile statt Anfang lese man **Umfang.**

Auf der 13 S. 5 Z. nach dem Wort: zweytausend, setze man hinzu: zwanzig tausend.

= = 23 = im Additions-Exempel muß die vierte der summirten Zahlen 797 und nicht 799 seyn.

= = 51 = 7 = muß $\frac{5}{3}$ statt $\frac{3}{5}$ stehen.

= = 55 = 20 = muß es $(d:n) \times n = d$ nicht $= n$ heissen.

= = 70 = 8 = muß $\frac{A}{n}$ und $\frac{B}{n}$ statt $\frac{A}{n} + \frac{B}{n}$ stehen.

= = 73 = 6 = lese man $Q + q$ statt $Q \times q$.

= = 83 = 10 = nach $q + \frac{r}{b}$ setze man das Wort seyn hinzu.

= = 85 = 5 = muß man nach dem Wort ausgedrückt folgendes hinzusetzen: ist, noch durch kleinere Zahlen ausgedrückt.

= = 87 = 4 = statt $\frac{a \times b}{\alpha \times \gamma}$ lese man $\frac{a \times b}{\beta \times \gamma}$, und in der 21 Z. setzen statt seyn,

= = 89 und 90 S. soll statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welches etliche mahl vorkomt; eigentlich $\alpha.\beta.\gamma.\delta$ gelesen werden, weil sonst allemahl der Punkt (.) als das Multiplications-Zeichen gebraucht ist, und hier $\alpha.\beta.\gamma.\delta.$ ein Product seyn soll.

Auf

Auf der 92 S. 19 Z. statt 96 lese man 72.
= = 96 = 21 = statt weil *m* ihr grösstes lese man: weil *m* der Nenner grösstes Maaß.
= = 106 = 14 = statt $\frac{1}{n\text{ten}}$ lese man $\frac{1}{n}$tel, und in der 19 Z. $\frac{2}{3}$ statt $\frac{2}{5}$.
= = 107 = 22 = statt 3 sey $\frac{3}{4}$ mahl in 4 lese man: 4 sey $\frac{3}{4}$ mahl in 3.
= = 110 = in der nächstletzten Zeile lösche man das Wort in weg, und in der letzten Zeile setze man: $Q \times \frac{n}{m}$ statt $\times \frac{n}{m}$.
= = 113 = 6 = lese man $\frac{\frac{4 \times 3}{7}}{5}$ statt $\frac{4 \times 3}{\frac{7}{5}}$, und in der 13 Z. $\frac{4}{5 \times 7 : 3}$ statt $\frac{4}{5 \times 7} : 3$
= = 117 = 9 = lese man $\frac{8}{7}$ statt $\frac{5}{7}$.
= = 121 = 17 = wenn bey lese man wenn man bey.
= = 140 = 9 = 5956 lese man 5936.
= = 148 = letzte Z. 1682 C. lese man 1682 Pf.
= = 176 = 3 = lese man 190 § statt 148 §
= = 195 = letzte Z. statt 1200 lese man 1250.
= = 201 = 11. und 22 Z. statt 204 § lese man 206 §.
= = 217 = 5 = von unten lese man GFE statt CFE.
= = 228 = 13 = statt + CA > GA lese man + CA > GE.
= = 237 = 23 = statt aus lese man ausser.
= = 250 = 10 = statt bey G lese man bey *g*.
= = 255 = 3 = von unten auf GH man setze hinzu: als.
= = 262 = 6 = von unten statt der lese man die.
= = 264 = 3 = statt C lese man E.

Auf

Auf der 267 S. 25 Z. statt AB = CD lese man AD : = CB.

= = 268 = letzte = statt: ist mit A einerley lese man: fällt auf der Seite, wo A liegt.

= = 288 = 7 = statt AB lese man *ab*.

= = 293 = 16 = statt EBG lese man FBG.

= = 299 = 3 = statt $R - \frac{1}{3}$ lese man $R - \frac{1}{3}R$.

= = 313 = 14 = statt $A \rhd C$ lese man $A \lhd C$, und in der letzten Zeile nach (160 §) setze man folgendes hinzu: gegen die Voraussetzung. Es kan auch nicht $B \lhd D$ seyn, sonst wäre $A : B \rhd C : D$ (160 §).

= = 319 = 13 = statt $B : A \times m$, lese man $B = A \times m$.

= = 320 = in den letzten 7 Zeilen muß allemahl C statt A stehen.

= = 324 = in der nächstletzten Zeile muß D statt B stehen.

= = 335 = 19 = statt 188 § lese man 191 §.

= = 336 = 2 = wiederum 191 § statt 188 §.

= = 338 = 3 = lese man 189 § statt 196 §.

= = 352 = 6 = von unten statt $\backsim$ ABE : ADC lese man ABE $\backsim$ ADC, und in der 4 Zeile von unten nach dem Wort: berühret, setze man hinzu: und AC ihn in B.

= = 356 = 8 = statt Anfangs lese man Umfangs.

= = 359 = 3 = von unten statt 183 § lese man 138 §.

= = 360 = 13. 14. 15. 16 Z. lese man = Π statt = π, Π : D statt π : D, Π : P statt π : P, Π > P statt π > P.

= = 363 = 8 = statt CH lese man EH.

= = 367 = 3 = statt: oder so groß lese man: oder halb so groß.

= = 373 = 22 = statt A : B lese man A : D.

= = 375 = 15 = statt 183 § lese man 199 §.

Auf der 376 S. 2 Z. statt $\frac{\alpha.\beta.\delta.\xi}{\alpha.\gamma.\varepsilon}$ (183 §)

lese man $\frac{A.\beta.\delta.\xi}{\alpha.\gamma.\varepsilon}$ (199 §).

= = 378 = 17 = nach dem Wort: Grundlinien setze man hinzu: und Höhen.

= = 385 = 2 = von unten statt Abschnitt lese man Dreyeck.

= = 386 = 3 = von unten nach dem Wort: aller setze man hinzu: ähnlichen.

= = 387 = 22 = nach dem Wort: oder setze man hinzu: jede für sich.

= = 388 = 8 = statt rechnen lese man messen.

= = 392 = 6 = von unten LP statt LB.

= = 393 = 10 = nach dem Wort: Ruthen setze man hinzu: mit der Anzahl Ruthen.

= = 404 = 18. 21 = statt 100000 lese man 1000000.

= = 417 = 5 = muß am Rande 134 F. statt 112 F. stehen.

= = 419 = 24 = am Ende des 301 § setze man hinzu: Es sey die Anzahl aller Winkel $= w$, so ist $w = 2l$. Nun ist $2l$ nie kleiner als $3h$ (300 §), also auch w nie kleiner als $3h$.

= = 421 = 3 = statt IB lese man AB.

= = 426 = 8 = von unten lese man: so ist BE statt so ist AE, 5 Z. von unten von B statt von A, und BE statt AE.

= = 433 = 6 = von unten statt 323 § lese man 189 §.

= = 439 = 8 = in einander statt in ander.

= = 442 = 4 = von unten lese man grades statt rechtwinklichtes.

= = 443 = 14 = 105 § statt 205 §.

= = 445 = 7 = von unten HL statt KL.

Auf

Auf der 446 S. 3 Z. lese man A statt R.
= = 454 = 22 = nach dem Wort: Unterschied setze man hinzu: von.
= = 459 = 5 = statt Prismen lese man Pyramiden.
Auf eben dieser Seite im 360 §. ist der Inhalt von P und π unrichtig angegeben. Die einzelnen Producte sind unrichtig unter einander gesetzt, und es stehet das dritte und vierte um eine Classe zu weit nach der Linken. Daher ist die Summe falsch, es muß heissen:

$$P = 4089959{,}65258 \text{ Cub. F.}$$

und $\pi = 1363319{,}884193$ Cub. F.

= = 467 = 1 = lese man 369 §. statt 349 §.
und in der 17 Z. lösche man A weg.
= = 469 = 2 = setze man 66932,240 statt 66565,573.
= = 478 = 6 = von unten lese man T$\varepsilon\eta$W statt F$\varepsilon\eta$W.
= = 479 = 19 = Halbkugel statt Kugel.
= = 482 = 3 = lese man zweymahl U statt V.

Ver=

Verzeichniß

der im zweyten Theil eingeschlichenen Druckfehler, und Verbesserungen.

Auf der 14 S. 1 Z. statt 2125 Sd. l. 125 Std.
= = 23 = 5 = statt aus l. nach.
= = 32 = 13 = statt S^3 l. S^2, und 20 Z. statt $S+u$ l. $(S+u)^2$.
= = 33 = 15 = statt S^{n-1} l. S^n.
= = 56 = 9 = und 61 S. 6 Z. statt Conci l. Coeci.
= = 63 = 2 = statt 1000 l. 100.
= = 85 = 3 = statt bd l. $6d$.
= = 89 = 1 = statt AD $\frac{b}{x}$ l. AD $= \frac{b}{x}$.
= = 97 = 14 = statt ab l. ab.
= = 108 = 13. 14 Z. statt den gegebenen Potenzen l. der = = Potenz.
= = 111 = 10 = statt 52 und 54 l. 53 und 55.
= = 118 = 16 = nach dem Wort die setze man hinzu Zeichen.
= = 121 = 1 = statt $cgx^{\frac{2}{5}}$ l. $cgx^{-\frac{2}{5}}$.
= = 131 = 10. 12. 19 Z. statt $2.\alpha^3\beta^2\gamma^1\delta$, $2\beta^2\gamma^1\delta$, $2\alpha^3\beta^2$ l. $2\alpha^3 \times \beta^2\gamma^1\delta$, $2\beta^2 \times \gamma^1\delta$, $2\alpha^3 \times \beta^2$.
= = 140 = 7 = statt von $\gamma^r a$ l. der $\gamma^r a$.
= = 144 = 20 = statt $100.10.10^2$ l. $100.10 + 3\alpha.10.10^2$.
= = 149 = 10 = statt $3\beta^2\gamma$ l. $3\beta\gamma^2$.

Auf der 155 S. 29 Z. statt 8762443 lese man 8762043.

= = 163 = 12 = statt Multiplication l. Subtraction.

= = 168 = 19 = stat hx l. hx^{-2}.

= = 172 = 2 = statt $B^{\frac{m}{n}} \sqrt[n]{A^m}$ l. $B^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{A^m}$.

= = 175 = 18 = statt 199 §. l. 183 §.

= = 177 = 2 = von unten statt m mahl l. n mahl.

= = 179 = 6 = statt $\frac{5}{8}$ l. $\frac{8}{5}$.

= = 185 = 6 = statt $a^{-m} = a^{\frac{1}{m}}$ l. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

= = 186 = 4 = statt $a:n$ l. $a:1$.

= = 190 = 19 = statt eigentlichen l. eigenen.

= = 193 S. Hier muß in der Columne der Logarithmen allenthalben das Zeichen (—) voran stehen.

= = 198 = 17. 19. 23. 24. 27. 28. 29. 30. 33 Zeile statt $\sqrt{}$E.F, $\sqrt{}$G.H, $\surd$L.M, $\surd$M.N, $\sqrt{}$P.Q, $\surd$Q.R, $\sqrt{}$RS, $\sqrt{}$S.T, $\sqrt{}$W.X, lese man $\sqrt{}$D.F, $\sqrt{}$F.H, $\sqrt{}$K.M, $\sqrt{}$K.N, $\sqrt{}$O.Q, $\surd$O.R, $\sqrt{}$O.S, $\sqrt{}$O.T, $\sqrt{}$V.X; auch muß in der 5 Z. von unten W statt lW stehen.

= = 204 = 25 = statt 3,0129931 l. 3,0119931.

= = 205 = 25 = statt demnach l. dennoch.

= = 211 = 14 = statt 2430 l. l2430.

= = 220 = 26 = statt den Rest vom l. vom Rest den.

= = 225 = 22 = statt 5,881 l. 9,881, und 28 Z. statt 7,376 l. 11,376.

= = 249 = 7 = statt auf l. auch.

Auf der 263 S. letzte Z. statt $(2ad-d)^2$ lese man $(2a-d)^2$.

= = 265 = 7 = muß $a+V$ in ( ) stehen. 8 Z. statt $VV \mp a(a-d)V$ l. $VV+(a-(a-d))V$. 10 Z. statt $+\frac{1}{2}d$ l. $-\frac{1}{2}d$ und statt $\frac{1}{2}dd$ l. $\frac{1}{4}dd$. 19 Z. statt 4268,25 l. 4286,25, und 20 Z. statt $a(-a)$ l. $a(a-d)$. Letzte Z. statt $2n=1$ l. $2n-1$.

= = 277 = 21 = statt (a^n-1) l. $a(e^n-1)$, und in der letzten Zeile statt *la* l. *l*.

= = 289 = statt 50 l. 30.

= = 292 = muß allenthalben 1,05 statt 105 stehen.

= = 314 = 3 = statt $\cos(\alpha=\beta)$ l. $\cos(\alpha-\beta)$, und 4 Z. von unten statt $\sin\alpha-\sin 2\alpha$ l. $2\sin\alpha-\sin 2\alpha$.

= = 317 = 15 = statt Kreis l. Sinus.

= = 338 = 11 = statt doppelt l. halb. 18 Z. im Nenner statt r^2 l. r.

= = 339 = 5 = vor $\frac{10-2\sqrt{5}}{4}$ setze man das Zeichen =.

= = 344 = 13 = statt = C l. = AB : sin C.

= 347 = 8 = vor EG setze man das Zeichen =.

= = 350 = letzte Z. statt $(b-c)$ l. $(b-c)^2$.

= = 355 = 1 = statt gab l. giebt.

= = 359 = 18 = statt $\frac{1}{2}nrr$ l. nrr, und 20 Z. statt $\frac{1}{4}nrr$ l. $\frac{1}{2}nrr$.

= = 361 = statt CD l. BF.

= = 391 = 4 = von unten nach dem Wort Polygon setze man hinzu: = Q ist, und

= = 400 = 17 = statt AEB.F l. AGBF.

= = 401 = statt 198 F. am Rande l. 194 F.

Auf der 404 S. 20 Z. statt ALC l. ACL, und 5 Z. von unten statt Bogen l. Lage.

= = 405 und 406 soll im 500 und 501 eigentlich das grosse Π statt des kleinen π stehen.

= = 407 = 14 = nach dem Wort durch setze man hinzu: den Punkt B und

= = 408 = 18 = statt AB l. CB, und unten am Rande statt 203 F. l. 199 F.

= = 410 = 18 = statt AD l. AB.

= = 412 = 26 = statt C l. E.

= = 413 = 6. 7. Z. statt C l. E, auch 12. 16 Z. statt A+B+C+D l. A+B+E+D.

= = 415 = 17 = statt 505 § l. 510 §.

= = 416 = am Rande statt 205. 206 F. l. 201. 202 § auch 4 Z. statt *βγδ* l. *βγα*, 23 Z. statt ABc l. ABC, und 3 Z. von unten statt ABD l. ABC.

= = 417 = 24 = statt A*b*C l. *ab*C, und 30 Z. statt BD l. *a*D.

= = 420 = 18 = statt 478 §. l. 495 §.

= = 423 = 16 = nach dem Wort senkrecht setze man hinzu: (318 §). Ferner sey NF auf CM senkrecht, und man ziehe FG, so ist auch FG auf CM senkrecht.

= = 429 = 11 = statt 479 §. l. 498 §, und 3 Z. von unten statt $< 90°$ l. $> 90°$.

= = 437 = 21. 24 = statt 521 § und 431 § l. 435 § und 417 §.

= = 440 = 11 = statt 525 §. l. 534 §.

= = 441 = 2 = von unten statt AB^2 l. AB.

= = 445 = 16 = lösche man: aus weg.

Auf der 452 S. 2 Z. Nach den Worten: so wird C = setze man hinzu: ACD + BCD, im Gegentheil aber C =. 13 Z. im Nenner muß es heissen: $\sin\beta \cos\alpha \cos B - \sin\alpha \cos\beta \cos A$, und 17 Zeile statt cot A cos : AC l. cot A cos : AC.

= = 454 = letzte Z. statt Grundlinie l. Grundfläche.

= = 455 = 8 = statt von l. an.

= = 458 = 10 = statt BD l. BC, CD.

= = 469 = 18 = statt XVIII. l. XIX.

= = 470 = 14 = statt Grundlinie l. Grundfläche.

= = 471 = 2 = statt 466 §. l. 453 §.

= = 472 = 25 = statt 474 § l. 462 §.

= = 473 = 25 = statt ABCDEF l. BCDEF.

= = 476 = 5 = statt 498 §. l. 511 §.

= = 479 = 19 = statt 90° l. cos 90°.

= = 480 = 10 = statt $\tan\frac{1}{2}\varphi \frac{1}{\sqrt{3}}$ l. $\tan\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{r3}$, und 19 Z. statt a^2 l. a^3.

= = 481 = 5 = statt $2\psi 2$ l. $2r2$.

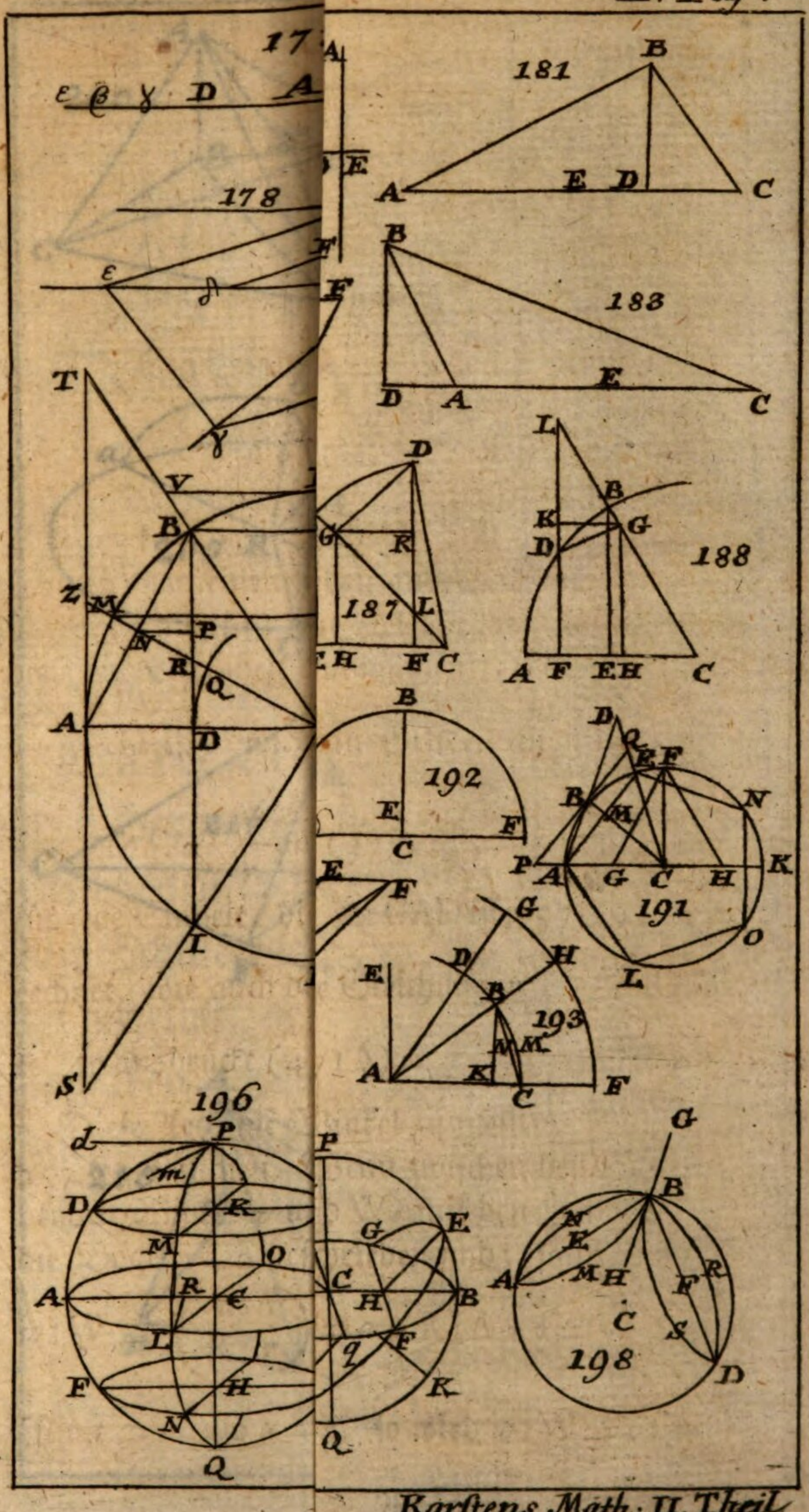
= = 484 = 5 = statt $l5$ l. $l\sqrt{5}$, und 10 Z. statt $r\frac{5}{3}$ l. $\frac{r5}{3}$.

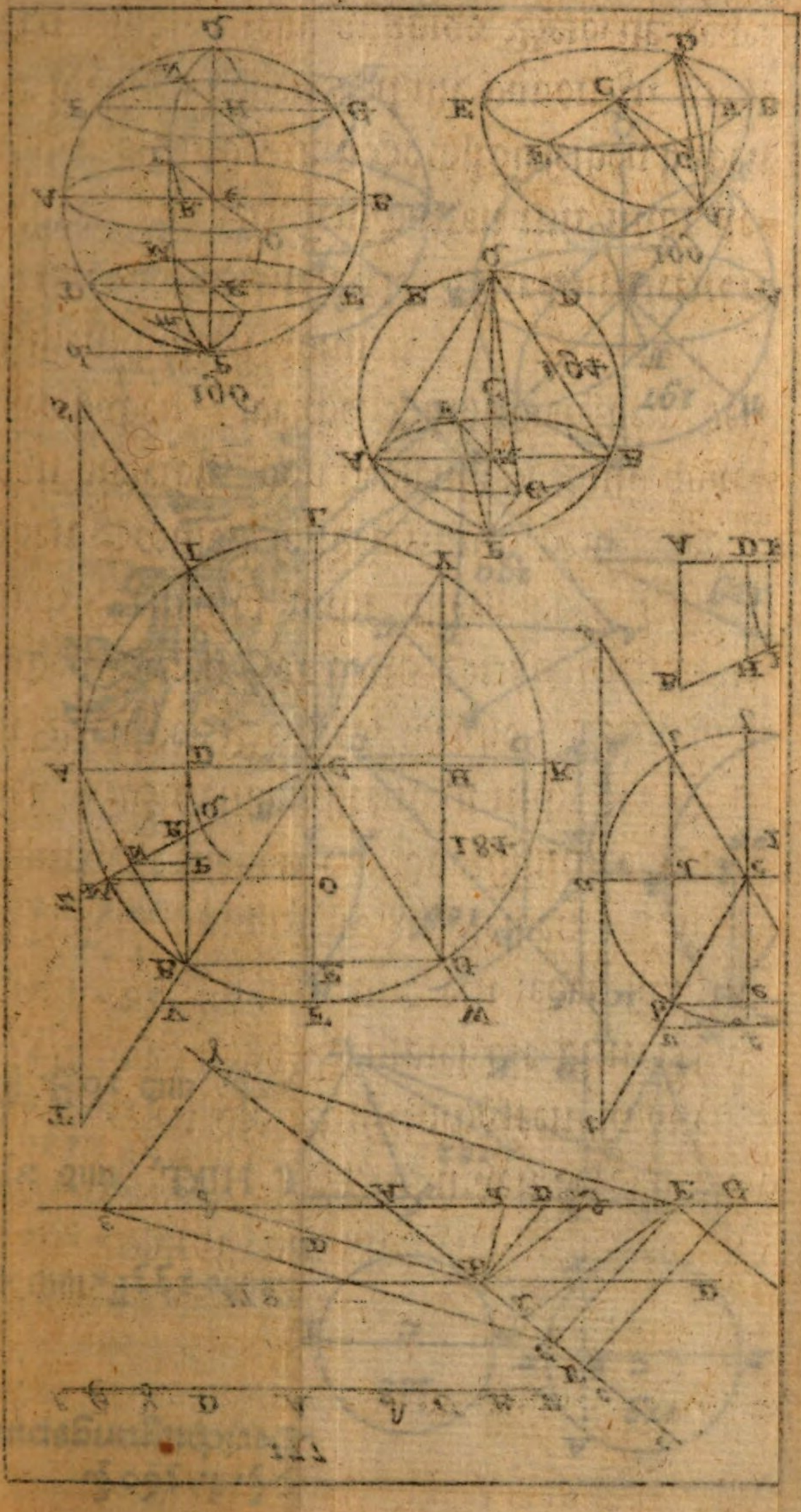
= = 485 = 4 = von unten muß das Zeichen r im Nenner und nicht im Zehler stehen.

= = 492 = 3 = im Nenner ist 2 kein Exponent, sondern ein Factor.

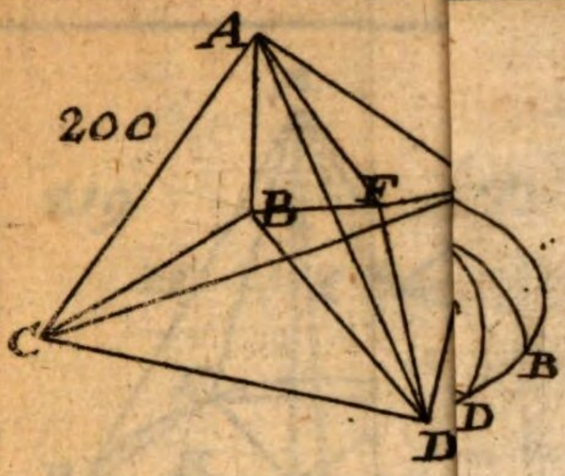
= = 495 = 6 = von unten statt Πad l. πad.

Auf der 504 S. 1 Z. statt 589 §. l. 560 §.
= = 508 = 4 = von unten statt Berichtigungspunkt l. Berührungspunkt.
= = 509 = 7 = statt CB l. CP.
= = 511 = 18 = setze man am Rande 233 F. und 4 Z. von unten εη l. Eη.
= = 513 = 15 = statt HOKL l. HIKL, und 23 Z. statt 614 § l. 619 §.
= = 514 = 9 = statt 579 § l. 599 §, und 10 Z. statt 599 § l. 617. 619 §.

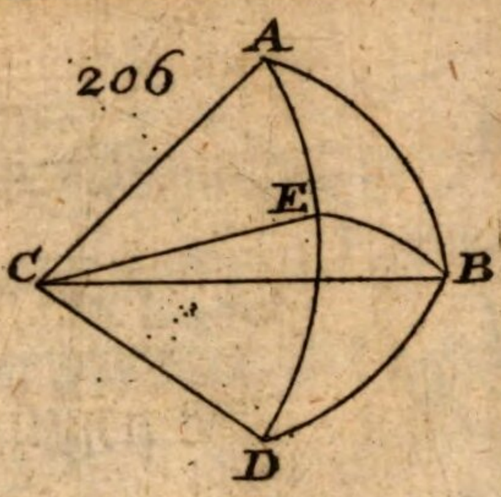

17
ε β γ D A
178
181
183
187
188
192
191
193
196
198



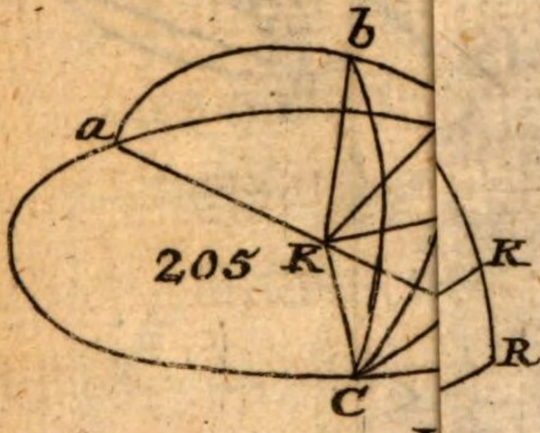
200



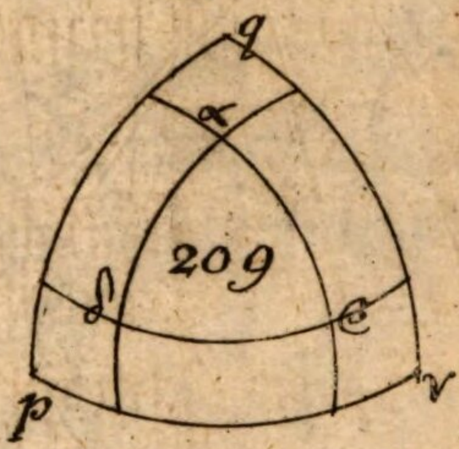
206



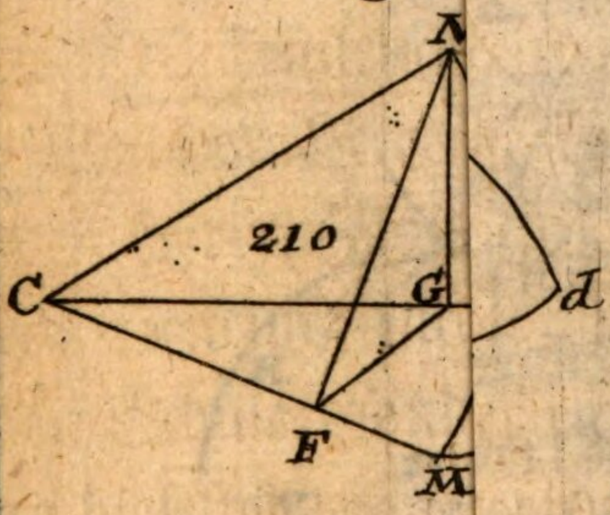
205



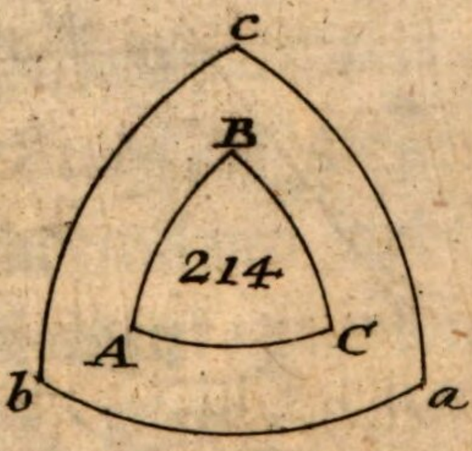
209



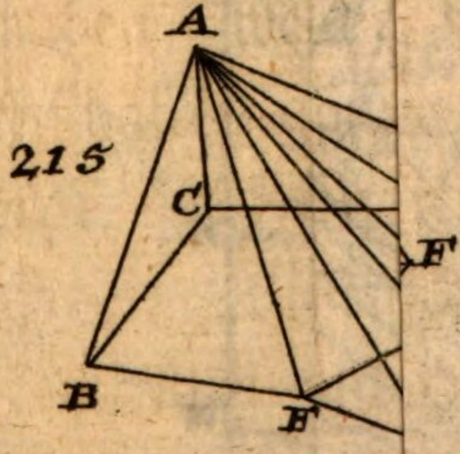
210



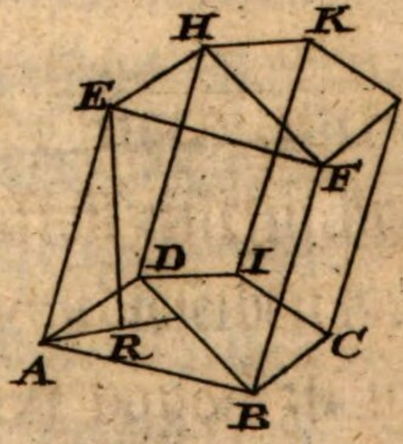
214



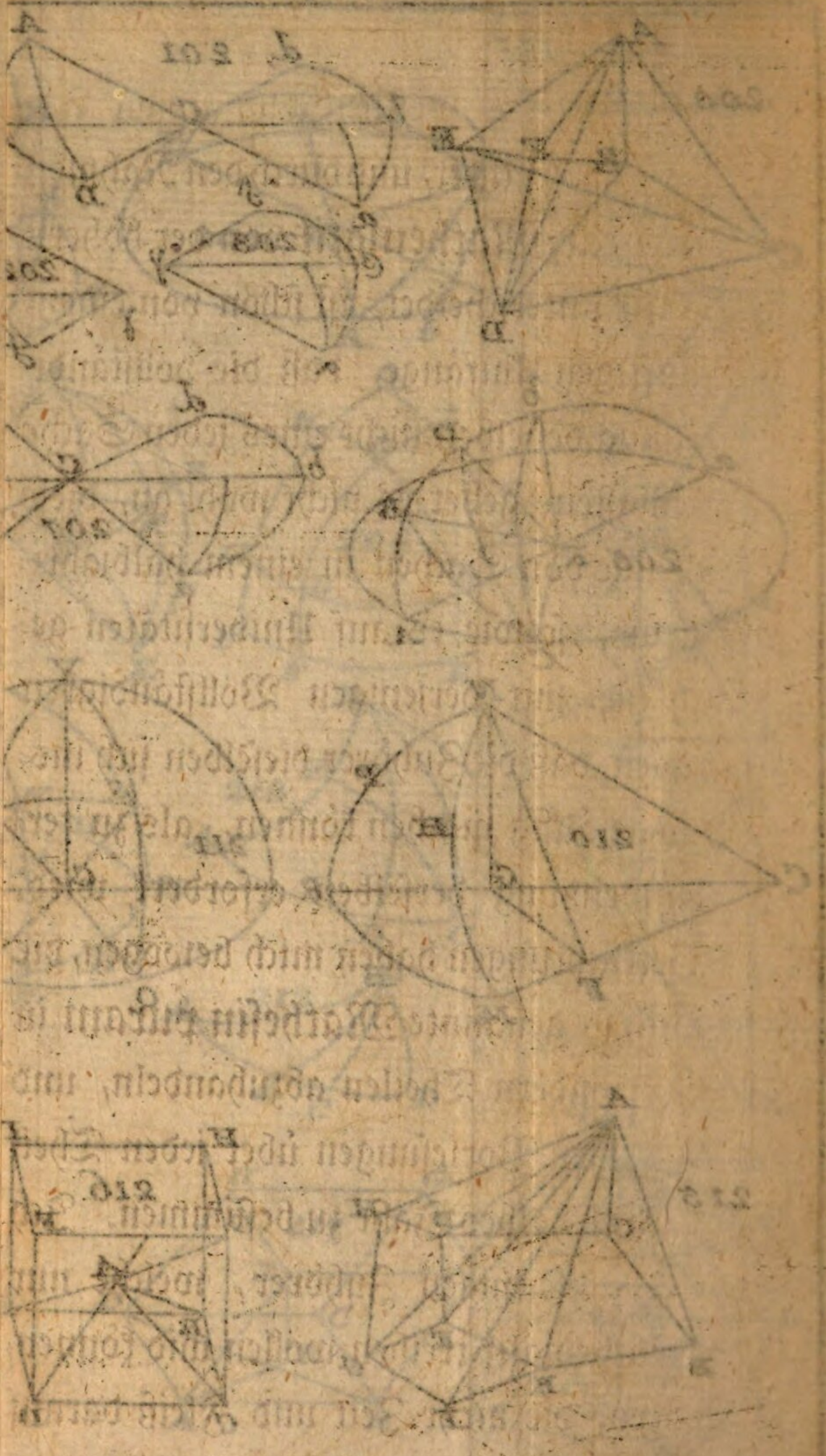
215

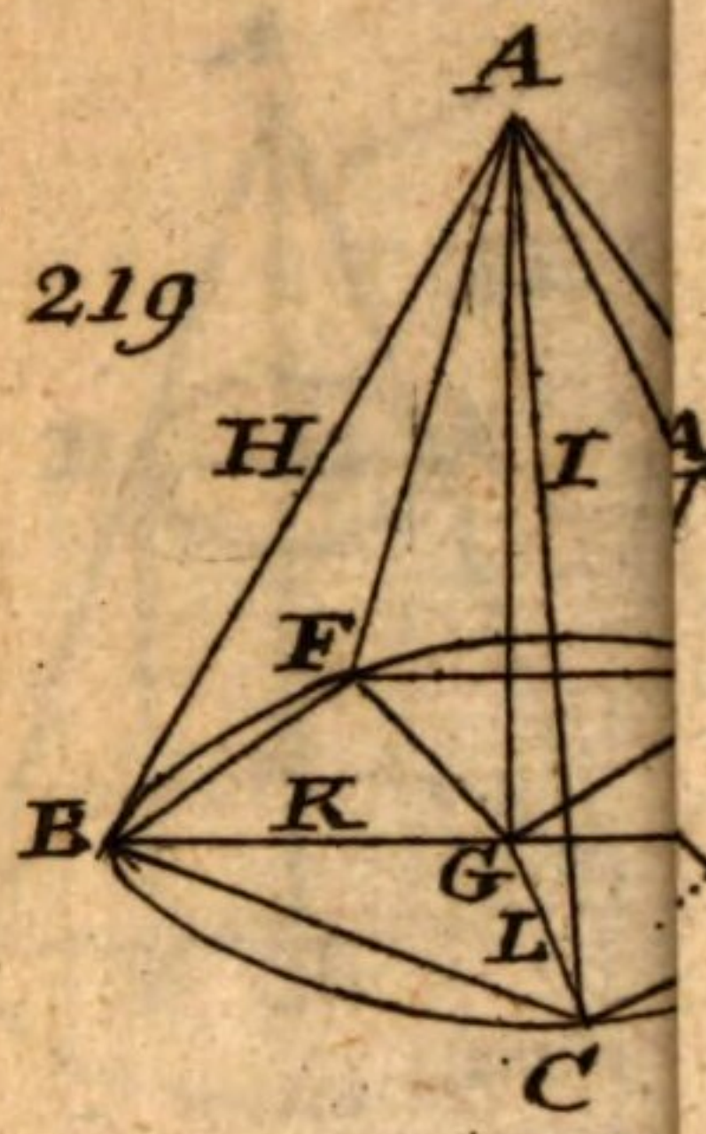


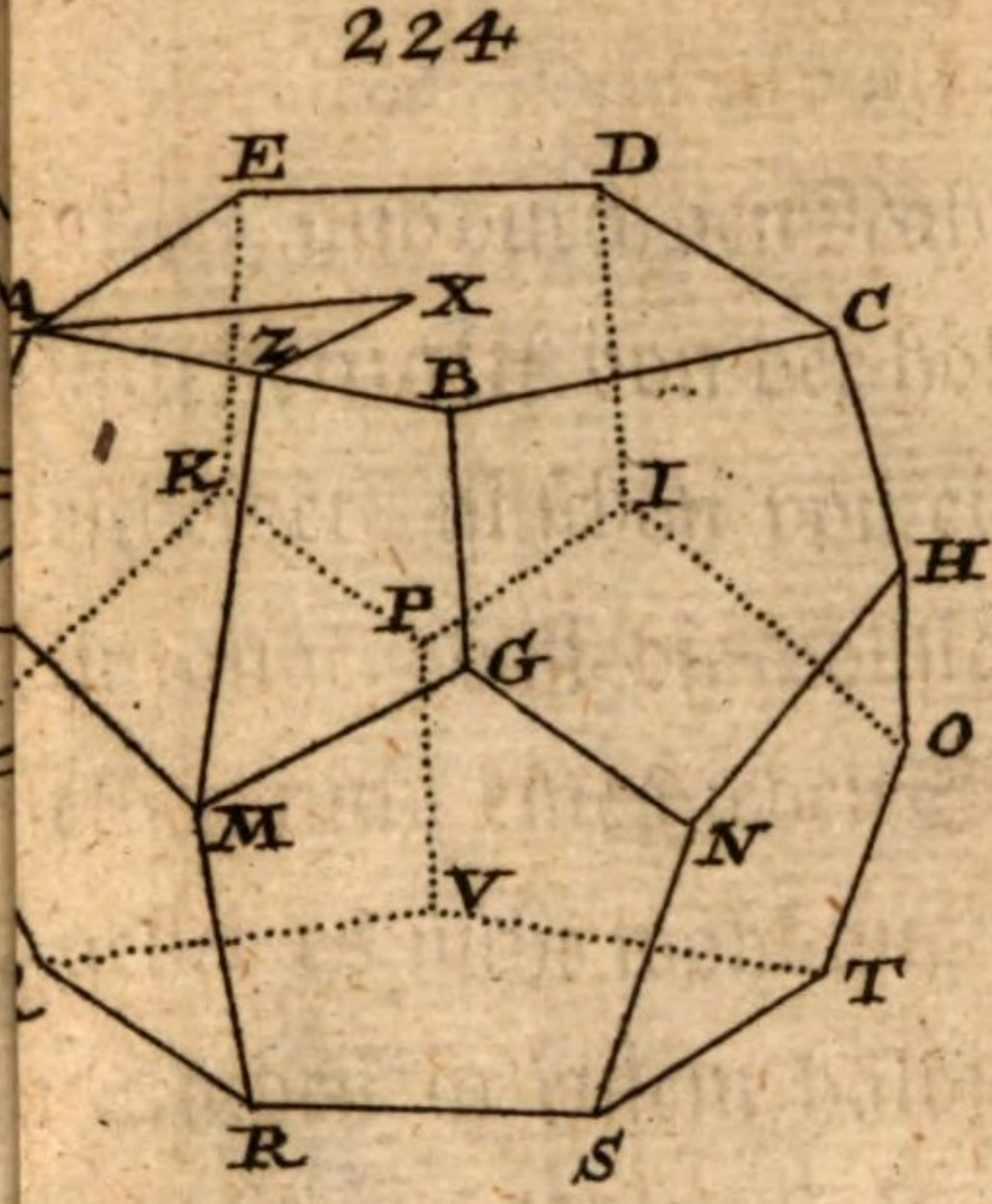
218



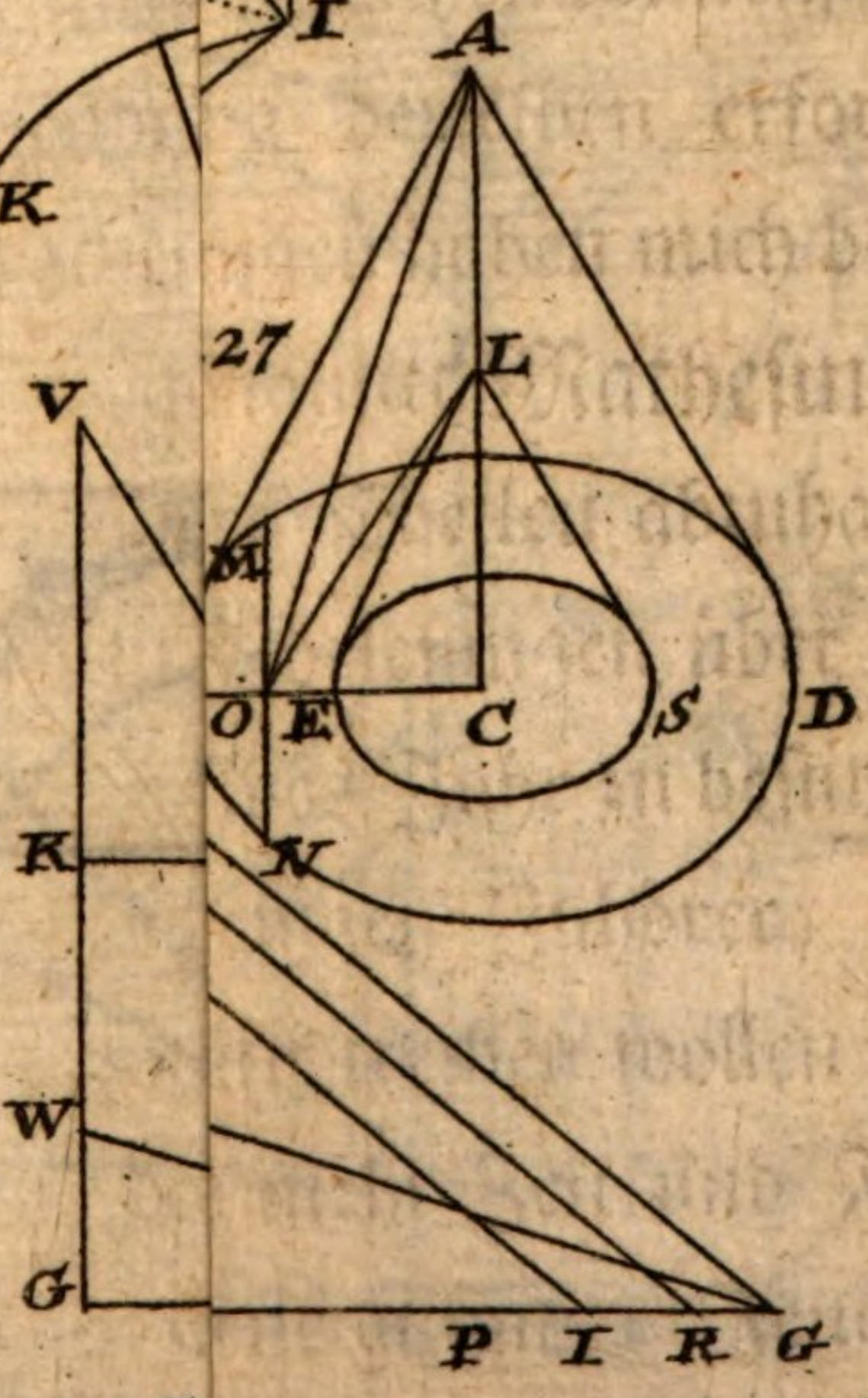
Karstens Math. II. Theil.

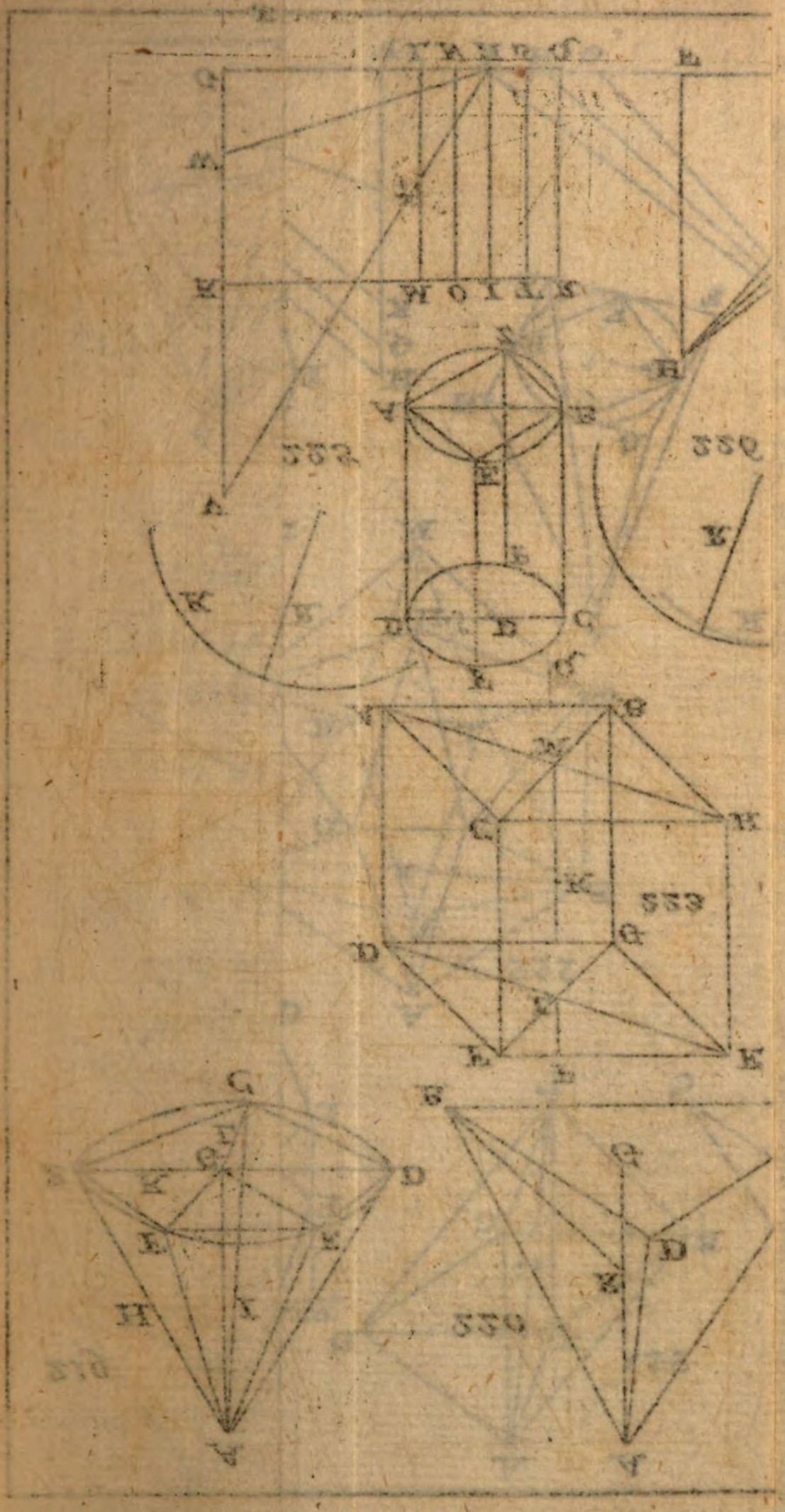


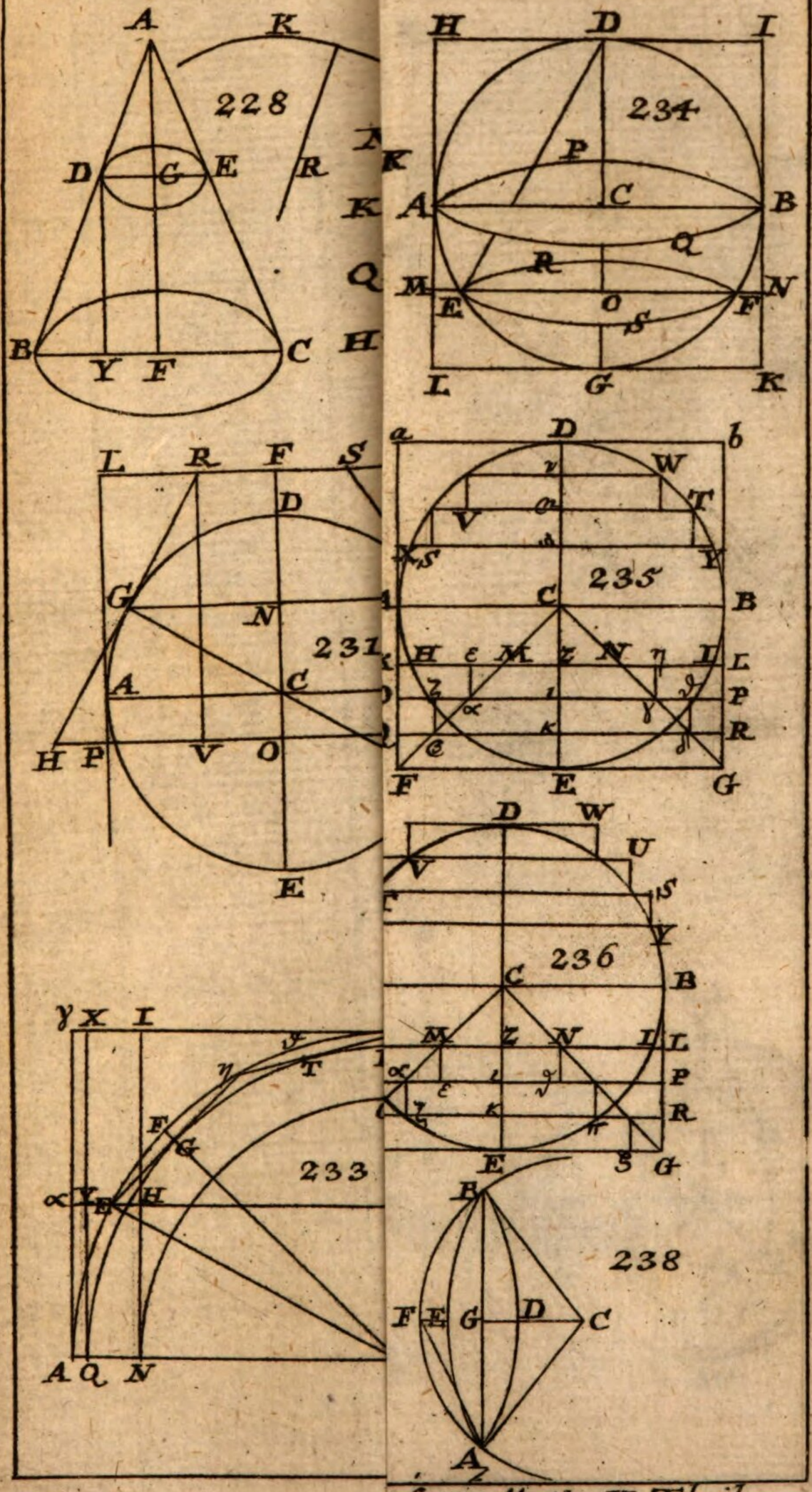

219
A
H
I
F
B
K
G
L
C


224
E
D
X
C
Z
B
K
I
H
P
G
O
M
N
V
T
R
S

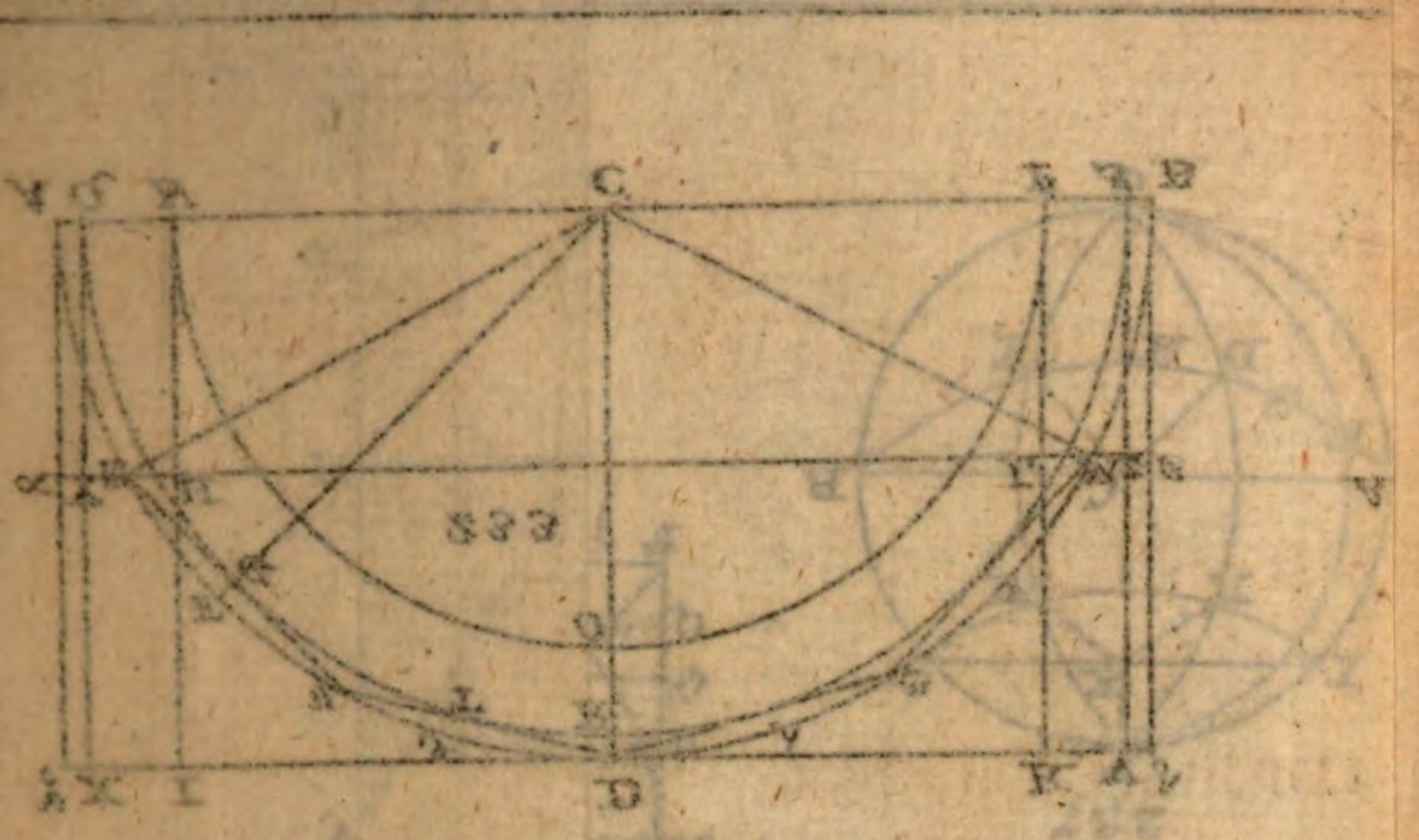
E
I
K

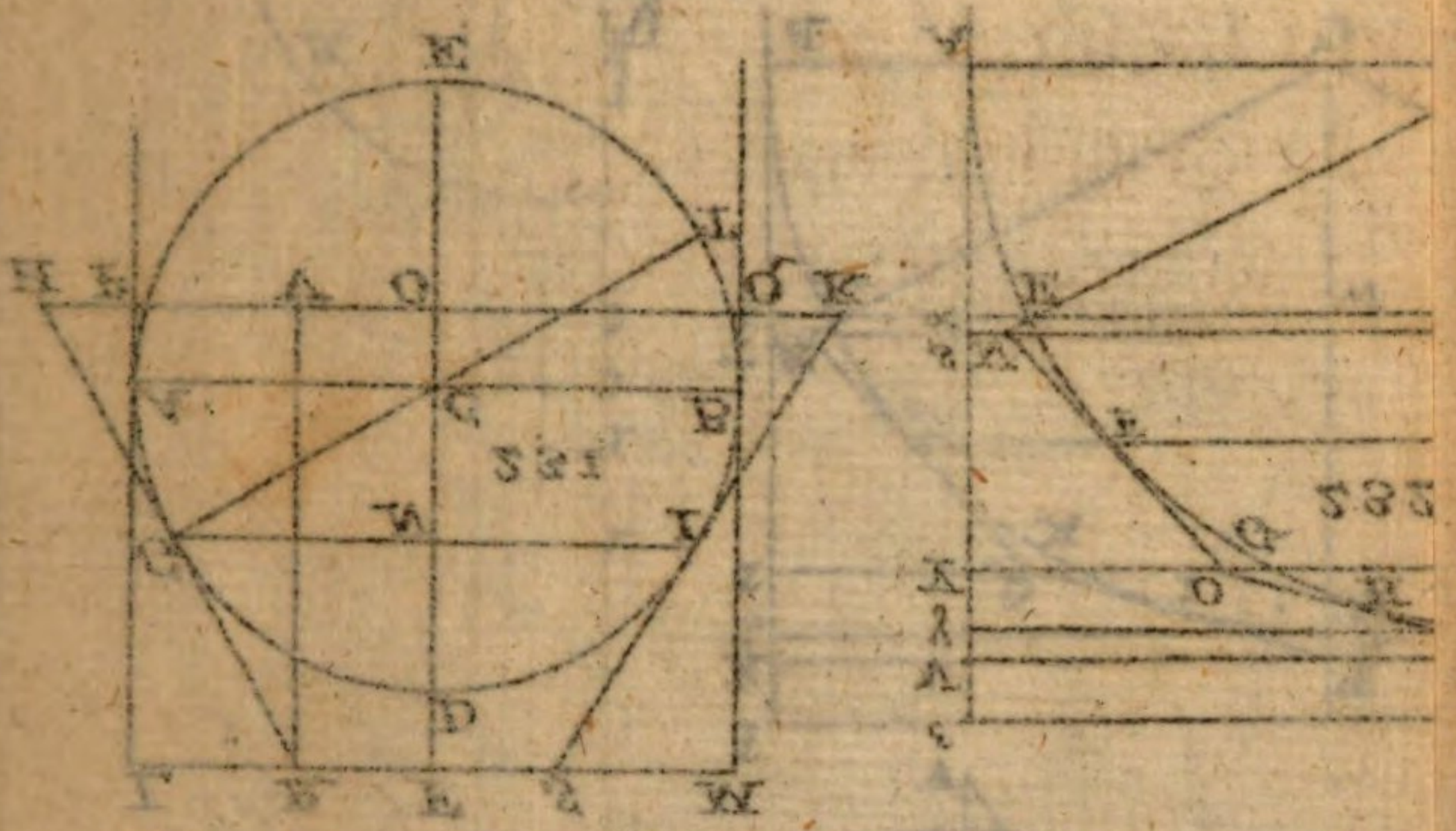

A
27
L
V
M
O
E
C
S
D
K
N
W
G
P
I
R
G

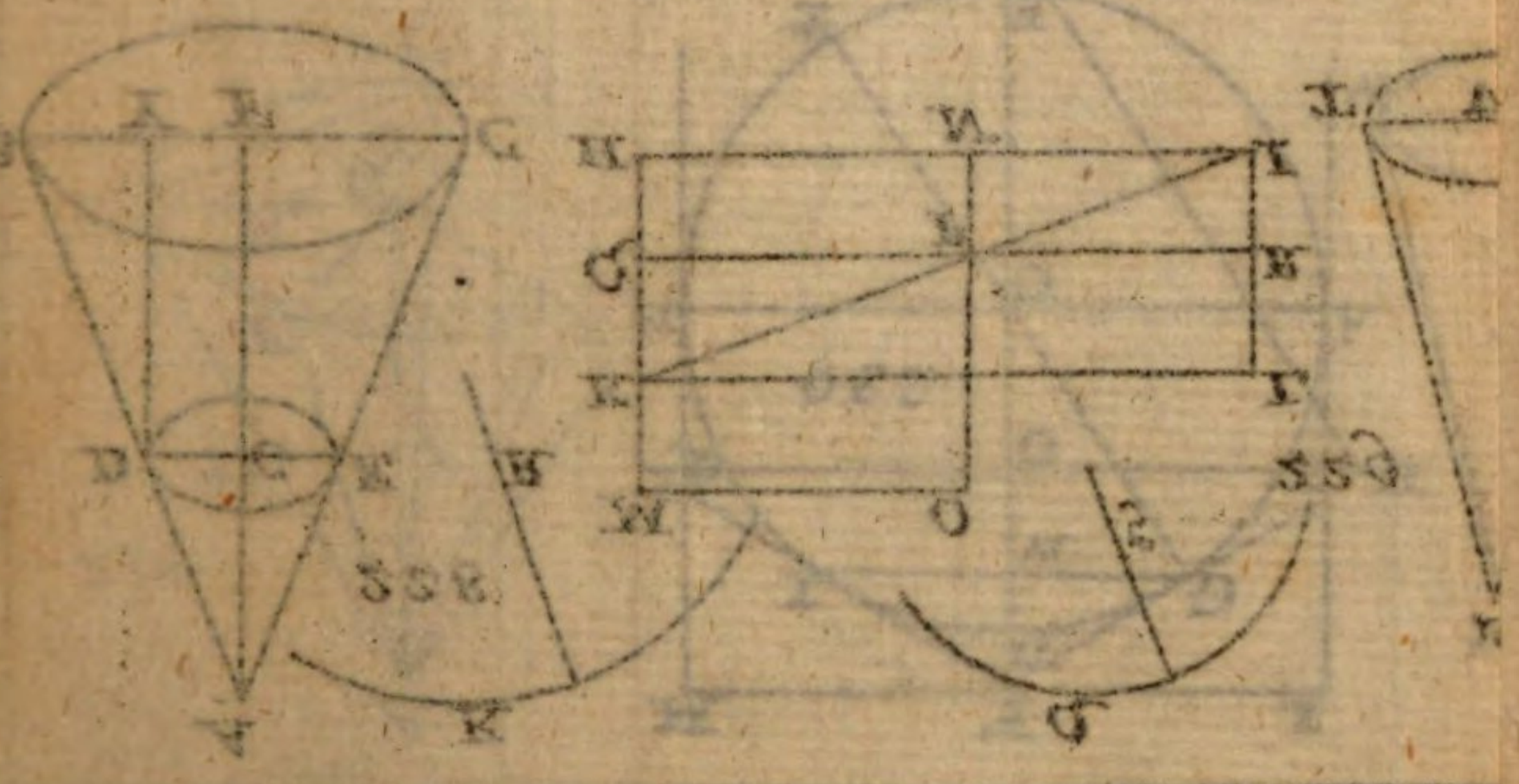


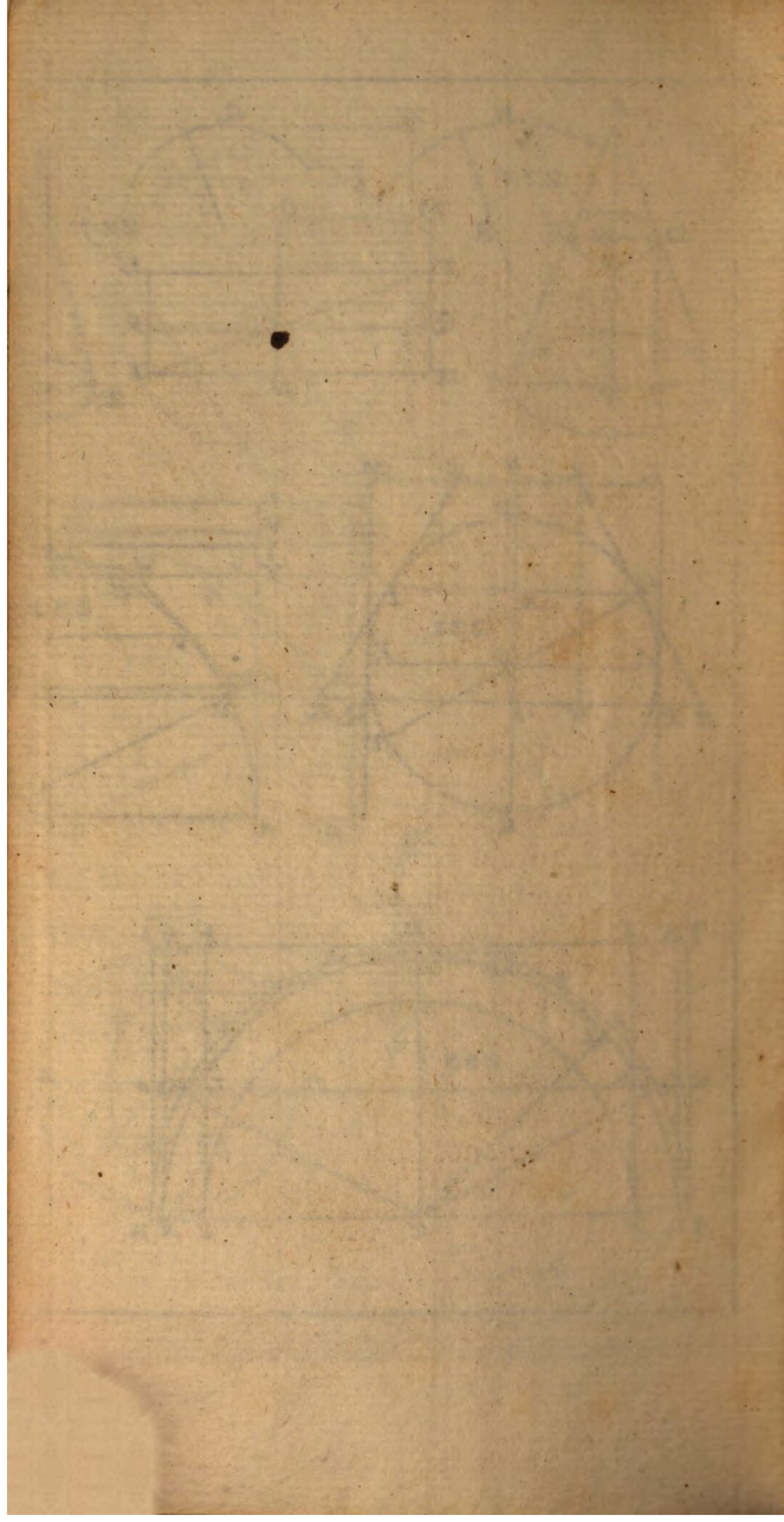


rstens Math: II. Theil.









BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Lehrbegrif der gesamten Mathematik

Bd.: 2

Greifswald 1768

Math.u. 85-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625585-7
VD18 80340407-001